12+

Паршаков Д.В.

10 проблема Гильберта

Опровержение неразрешимости

Дмитрий Васильевич Паршаков

10 проблема Гильберта. Опровержение неразрешимости

http://www.litres.ru/pages/biblio_book/?art=43438788
SelfPub; 2019

Аннотация

Всем известно, что существуют тройки натуральных чисел, верных для Теоремы Пифагора. Но эти числа находили методом подбора. И если доказать, что есть некий алгоритм нахождения этих троек чисел, то возможно утверждение о том, что 10 проблема Гильберта неразрешима ошибочно..

Десятая проблема Гильберта. Алгоритмы для уравнения с тремя переменными во второй степени.

В 1900г. на 1 Международном математическом конгрессе, известный математик Давид Гильберт поставил перед математиками всего мира 23 задачи. Эти задачи принято называть "Проблемами Гильберта".

Решением десятой проблемы Гильберта стало признание ее неразрешимости, доказанное советским математиком Ю.В.Матясевичем в 1970г.

Доказательство неразрешимости Матиясевича признано как единственно допустимое, но возможно это не так.

Итак, для того, чтобы опровергнуть, либо подтвердить это доказательство нужно вначале напомнить задачу, определенную Д.Гильбертом в 10-й проблеме.

«Пусть задано диофантово уравнение с произвольными неизвестными и целыми рациональными числовыми коэффициентами. Указать способ, при помощи которого возможно после конечного числа операций установить, разрешимо ли это уравнение в целых рациональных числах»

То есть нужно найти некий алгоритм, при помощи которого возможно находить натуральные (целочисленные) значения для произвольных неизвестных.

Самое известное уравнение Диофанта это формула Пифагора.

$a^2 + b^2 = c^2$

Известны также так называемые «тройки Пифагора», целочисленные значения для неизвестных «a,b,c»

3,4,5; 5,12,13; 7,24,25 и т.д. Эти тройки имеют два сходства: первое – квадрат первого (наименьшего) числа равен сумме двух других чисел, второе – разница между вторым и третьим числом равна 1. Следовательно, можно предположить, что это не случайные совпадения. Исходя из этого, составим равенства

$$a^2 = b + c \qquad b = c - 1 \qquad a^2 = 2c - 1 \qquad a^2 = 2b + 1$$

Теперь, используя все эти формулы, составим уравнения

$$b = \frac{a^2 - 1}{2} \qquad c = \frac{a^2 + 1}{2}$$

Подставим эти уравнения в формулу Пифагора

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$a^2 + \left(\frac{a^2 - 1}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2 + 1}{2}\right)^2$$

$$a^2+\frac{a^4}{4}-\frac{a^2}{2}+1=\frac{a^4}{4}+\frac{a^2}{2}+1$$

$$a^2=a^2$$

Получилось равенство значений правой и левой сторон уравнения. Это можно считать доказательством существования алгоритма нахождения натуральных значений «пифагоровых троек». Но эти формулы диофантовы лишь для нечетных чисел, хотя при постановке в формулы четных чисел для «а» также можно найти значения двух других чисел «b,c», эти значения будут рациональными, но не целыми числами. Например «а»= 8

$$8^2+\left(\frac{8^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{8^2+1}{2}\right)$$

$$64+\left(\frac{64-1}{2}\right)^2=\left(\frac{64+1}{2}\right)$$

$$64 + 31.5^2 = 32.5^2$$

$$64 + 992.25 = 1056.25 \qquad 1056.25 = 1056.25$$

Используя этот алгоритм можно составить перечислимое множество для каждого неизвестного, что также является подтверждением решения 10 проблемы Гильберта

$$a_1 = 1 \to a_2 = a_1 + 1 \to a_3 = a_2 + 1 \to \dots a_n = a_n$$

$$b_1 = 0 \to b_2 = b_1 + 1.5 \to b_3 = b_2 + 2.5 \to \dots b_n = b_{n-1} + n + 0.5$$

$$c_1 = 1 \to c_2 = c_1 + 1.5 \to c_3 = c_2 + 2.5 \to \dots c_n = c_{n-1} + n + 0.5$$

Также, применяя этот алгоритм, можно находить соответствующие значения «троек» для любых рациональных чисел, даже не натуральных. Например: а=2,5

$$2.5^2+\left(\frac{2.5^2-1}{2}\right)^2=\left(\frac{2.5+1^2}{2}\right)^2$$

$$6.25+\left(\frac{6.25-1}{2}\right)^2=\left(\frac{6.25+1}{2}\right)^2$$

$$6.25+2.625^2=3.625^2$$

$$6.25+6.890625=13.140625 \quad 13.140625=13.140625$$

Во всех этих примерах сохраняется условие

$$c-b=1$$

Итак: алгоритм для

$$a^2+b^2=c^2$$

при

$$b = \frac{a^2 - 1}{2} \qquad c = \frac{a^2 + 1}{2}$$

можно считать универсальным для всех рациональных чисел. Но этот алгоритм нахождения «троек» является первичным для взаимно простых чисел, так как существует формула кратности этого уравнения

$$(na)^2 + (nb)^2 = (nc)^2$$

Возьмем предыдущий пример при «a»=2.5 с «n»=8

$$a \to 2.5 \times 8 = 20$$

$$b \to 2.625 \times 8 = 21$$

$$c \to 3.625 \times 8 = 29$$

Разница между числами «b» и «c» соответствует коэффициенту «n».

Постановка вопроса о разрешимости диофантовых уравнений подразумевала также доказательство теоремы Ферма. Почему же не может существовать целочисленные значения для уравнения

$$a^n + b^n = c^n \quad \text{при} \quad n \geq 3$$

Чтобы это доказать требуется это уравнение привести в квадратное уравнение

$$a^2 \times a^{n-2} + b^2 \times b^{n-2} = c^2 \times c^{n-2}$$

Получилось уравнение , где неизвестные имеют разные коэффициенты. Упростим уравнение

$$a^2\left(\frac{a^{n-2}}{c^{n-2}}\right) + b^2\left(\frac{b^{n-2}}{c^{n-2}}\right) = c^2$$

Теперь можно применить алгоритм нахождения «пифагоровых троек». То есть для получения целочисленного значения для каждого неизвестного необходимо соблюдения условия первичного алгоритма

$$c - b = 1$$

Следовательно, должно выполняться равенство

$$c - b\sqrt{\frac{b^{n-2}}{c^{n-2}}} = 1$$

А так как соотношение

$$\sqrt{\frac{b^{n-2}}{c^{n-2}}} < 1$$

и следовательно

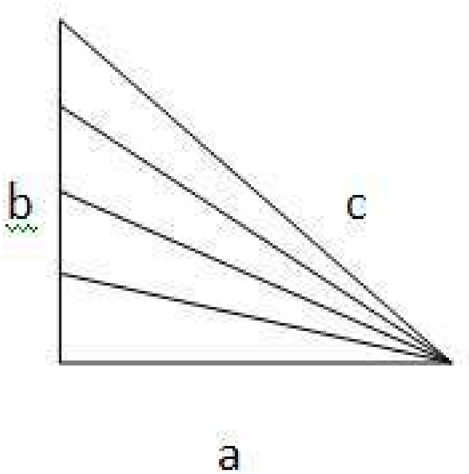
$$c - b < 1$$

то по условиям уравнения «b» не может быть целым числом. Что и требовалось доказать.

Геометрический смысл Теоремы Ферма.

Некоторые математики, пытаясь доказать теорему Ферма, при «п»=3, изображают кубы и называют это геометрическим отображением. Другие создают графики бесконечных функций. Но в формуле присутствуют лишь три числа, а из трех чисел можно составить только треугольник. Поэтому при любых значениях «п» нужно понимать, что функцией этого уравнения возможен только треугольник. Для примера используем Теорему Пифагора.

Формула Пифагора является алгоритмом для прямоугольного треугольника при вычислении длины его сторон. А равнобедренный прямоугольный треугольник, в свою очередь можно считать графическим отображением этой формулы, то есть функцией. Графиком функции уравнения является прямая, совпадающая со стороной «b».



Это график квадратного уравнения при «а» = 4 с шагом 1.

Где «а» большее число, в данном случае это число «4». Если же число «b» будет иметь значение больше «4» то его нужно автоматически считать большим числом уравнения, то есть стороной «а».

Итак, для уравнения

$$a^2 + b^2 = c^2$$

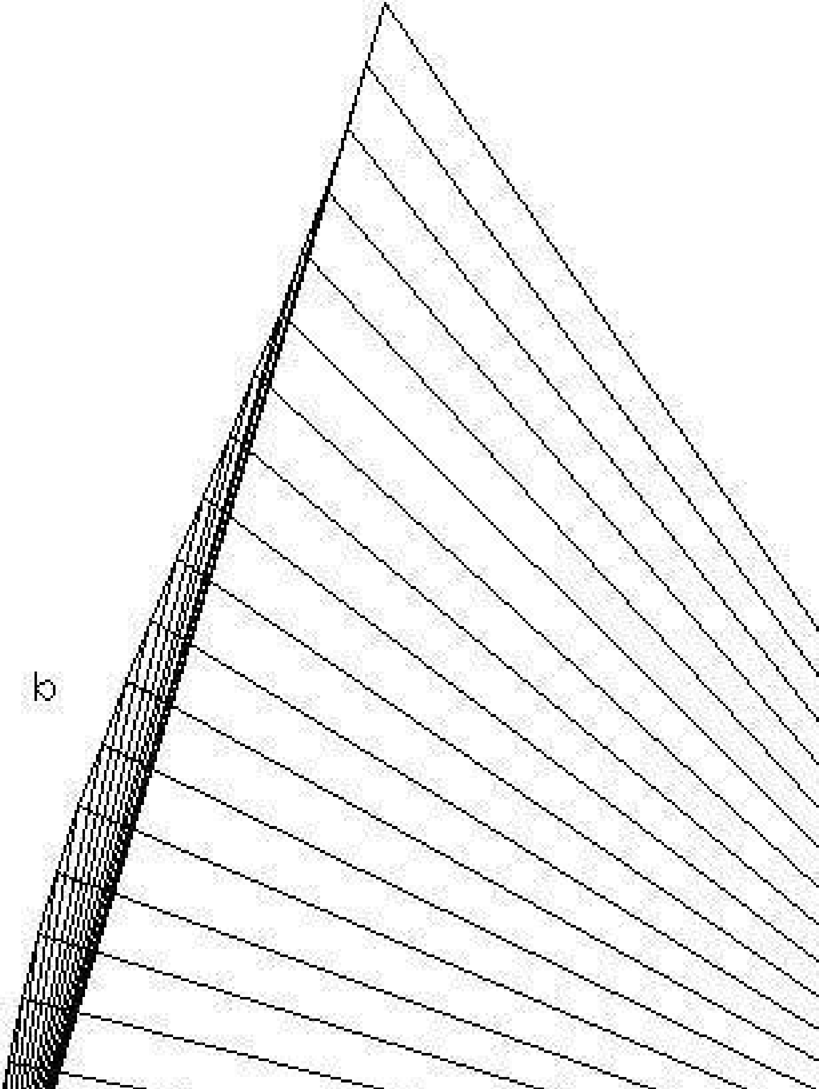
И если для уравнения при «п» = 2 графиком является прямая, то можно составить подобный график и для остальных «п»>2, который должен быть ограничен равнобедренным треугольником, при равенстве значений «а» и b». И также как для графика квадратного уравнения, сторона «а» должна быть больше стороны «b». Для начала составим график для «n»=3, чтобы график выглядел более подробно возьмем число «а»=20, с шагом 1. А также соединим вершины получившихся треугольников.

Рисунок 1

A

C

b

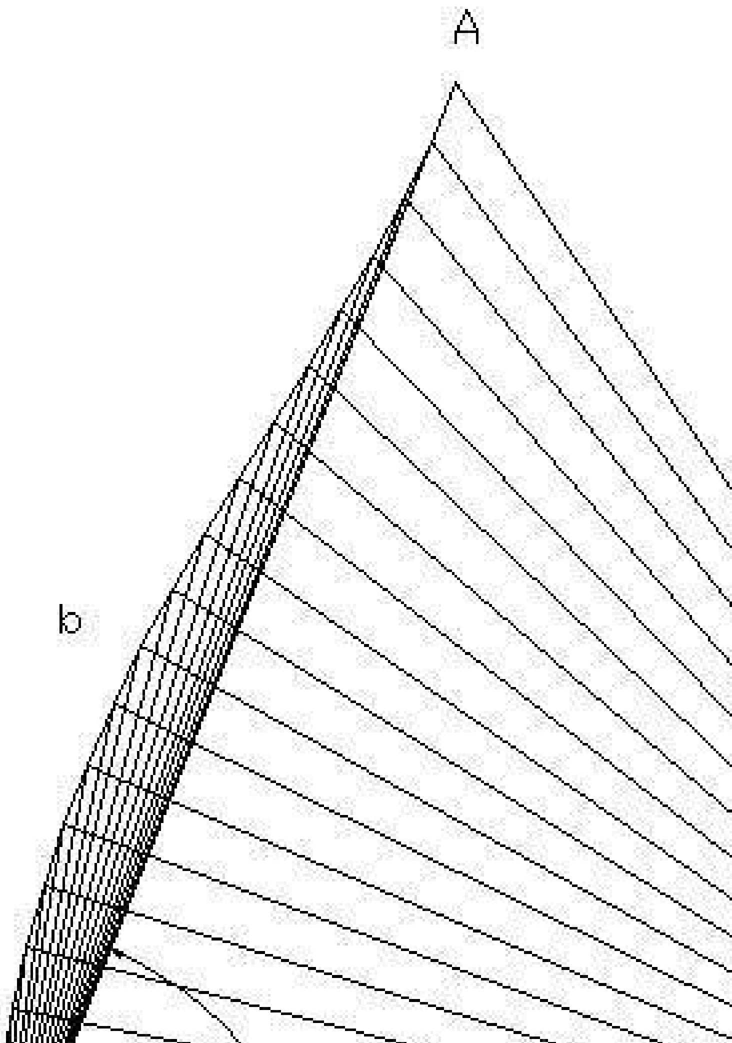


Итак, отображение кубического уравнения, или функцией, является кривая линия, ограниченная значением стороны «a» и значением стороны «b» = «a». Еще раз напомню, что при «b»> «a» , значение «b» переносится на сторону «a», и наоборот значение «a» переносится на сторону «b», при этом кривая графика остается неизменной, лишь увеличившись в масштабе.

Из этого графика видно, что угол «С», противоположный стороне «с», имеет значения примерно от 90 до 78 градусов.

$$90^0 > C > 78^0$$

Рисунок 2


A
b

На рис. 2 изображен график для уравнения

$$a^9 + b^9 = c^9$$

Как видно из графика, угол «С», при «а» = «b», уменьшился и составил 68 градусов, однако при наименьших значениях «b», этот угол также стремится к 90 градусам. И чем выше степень «п» тем меньше будет угол «С» при «а» = «b», оставаясь неизменным при наименьших значениях «b». Но угол «С» не может быть равным 60 градусам, иначе «а» = «с», что противоречит уравнению. Также этот угол не может быть прямым, поскольку угол 90 градусов верен только для квадратного уравнения. Исходя из этого, можно составить неравенство для угла «С», при всех «п»>2.

$$60^0 > C > 90^0$$

Из графика также видно, что угол «А» имеет те же самые пределы, а вот угол «В» имеет пределы от 0 до 60 градусов соответственно. Составим неравенства для этих углов

$$60^0 < A < 90^0 \qquad 0^0 <$$

Итак, установлены значения углов «A», «B» и «C». Теперь можно приступить непосредственно к доказательству теоремы.

Чтобы доказать теорему для всех натуральных чисел при «n» > 2, нужно найти какой-то общий алгоритм. Так как при любом значении «n» три числа составляют треугольник, для их нахождения можно использовать тригонометрические функции. Проще всего использовать теорему синусов

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Подставим значение «b» в уравнение

$a^n + b^n = c^n$

$$a^n + \left(a\frac{\sin B}{\sin A}\right)^n = c^n$$

$$a^n \left(\frac{\sin}{\sin}\right.$$

Упростим уравнение

$$a\sqrt[n]{\left(\frac{\sin B}{\sin A}\right)^n + 1} = c$$

Так как синус угла «А» больше синуса угла «В», то подкоренное значение не может быть натуральным числом и теорему можно считать доказанной. Однако можно представить это уравнение и через подстановку значения «а»

$$a = b\frac{\sin A}{\sin B}$$

И тогда соотношение $\frac{\sin A}{\sin B}$ вполне может иметь натуральное значение. Поэтому для объективного доказательства примем эти соотношения за любое число «х», причем, неважно через какое число «а» или «b», поэтому эти числа можно обозначить как натуральное число «у»

$$x = \frac{\sin A}{\sin B} = \frac{\sin B}{\sin A} \quad a(b)\sqrt[n]{x}$$

$$y = a = b \qquad y\sqrt[n]{x^n + 1} =$$

Итак, получилось алгебраическое уравнение, произведение которого не имеет натурального значения и является иррациональным числом. Так как, если любое число возвести в любую степень больше 2 и прибавить 1, то при извлечении из этой суммы корня той же степени получится иррациональное число.

$$\sqrt[n]{x^n + 1} \neq Q$$

Произведение иррационального числа на любое натуральное число будет числом иррациональным.

$$y\sqrt[n]{x^n + 1} \neq Q \qquad \sqrt[n]{c}$$