ГЕОДЕЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ И ВОЕННО-ГЕОДЕЗИЧЕСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
МОСКОВСКОГО МЕЖЕВОГО ИНСТИТУТА

Проф. А. С. ЧЕБОТАРЕВ

СПОСОБ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО ВЫСШЕГО ТЕХНИЧЕСКОГО УЧИЛИЩА
МОСКВА—1928

ГЕОДЕЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
И ВОЕННО-ГЕОДЕЗИЧЕСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
МОСКОВСКОГО МЕЖЕВОГО ИНСТИТУТА

Проф. А. С. ЧЕБОТАРЕВ

СПОСОБ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

ВТОРОЕ ИЗДАНИЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО ВЫСШЕГО ТЕХНИЧЕСКОГО УЧИЛИЩА
МОСКВА — 1928

Главлит А—11071. Тираж 2 000 экз.

Типография Госиздата „Красный пролетарий“. Москва, Пименовская, 16.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

ТЕОРИЯ ОШИБОК ИЗМЕРЕНИЙ.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ.

Восприятие явлений окружающего нас мира происходит при помощи ощущений, испытываемых нашими органами чувств.

Но эти органы, к сожалению, весьма несовершенны. Так, например, при оценке на глаз расстояний мы легко ошибаемся на величину, равную 1/10 оцениваемой длины, при небольших расстояниях, а при больших расстояниях наша способность оценивать глазом расстояния оказывается значительно худшей. Такова же точность определения рукою веса тела.

Воздушное давление мы, можно сказать, не замечаем, а для магнитных и электрических явлений у нас совершенно не имеется воспринимающих органов.

Таким образом, непосредственное восприятие органами чувств явлений окружающего мира происходит у человека весьма неполно и не точно.

Для того, чтобы расширить и уточнить свои представления о мире, человек „вооружается“ различными инструментами и приборами, причем, в виду того, что из наших органов чувств наиболее совершенным является глаз, а за ним следует ухо и наконец мускулы, тогда как обоняние и вкус играют в познании окружающих явлений весьма скромную роль,— громадное большинство инструментов основано на зрении и довольно большое число их на слухе, хотя и здесь слуховые инструменты стараются по возможности заменить зрительными.

Геодезические инструменты относятся к числу зрительных измерительных приборов.

Но как бы ни были хорошо изготовлены измерительные приборы, как бы ни уточняли они наши понятия о мире, все же эти приборы, как изделия наших рук, остаются по существу несовершенными, а результаты измерений этими инструментами и приборами будут всегда страдать недостатками: они будут всегда заключать в себе погрешности измерений, будут сопровождаться ошибками. Истинное значение измеряемой величины для нас, за весьма редкими исключениями, сокрыто.

Поэтому при измерениях естественно возникают вопросы о возможном уменьшении и устранении влияния ошибок на результаты измерений, о точности достигаемых результатов и о наиболее рациональном использовании их.

Устранить в измерениях можно и должно различные, могущие произойти промахи и просчеты, т. е. то, что принято называть *грубыми* ошибками. Это делается при помощи контрольных повторных измерений.

Можно так или иначе учесть в измерениях ошибки, носящие правильный характер, так называемые *систематические* ошибки.

Систематические ошибки разделяются на инструментальные, личные и внешние. Они изучаются одновременно с изучением самых инструментов и способов действия ими.

Самое влияние систематических ошибок устраняется полностью или отчасти либо введением поправок в результаты измерений, либо целесообразным расположением измерений, благодаря чему влияние систематических ошибок устраняется из окончательных результатов измерений.

Но, за всем тем, в измерениях всегда остаются ошибки иного рода, ошибки, размер и характер влияния которых на каждый отдельный результат измерения не в нашей власти; эти ошибки являются делом случая, а потому и носят название *случайных ошибок.*

Случайные ошибки при измерениях неизбежны, они сопровождают каждое измерение, избавить результат измерения от случайных ошибок нельзя. Поэтому, в отношении случайных ошибок возможны лишь следующие вопросы:

1) как оценить точность полученных результатов измерения, определить степень доверия, которого они заслуживают;

2) как из результатов измерений сделать наиболее правильные, наиболее надежные выводы.

Разрешением означенных вопросов занимается теория ошибок измерений.

ГЛАВА I.

Основания теории ошибок измерений.

§ 2. Свойства случайных ошибок измерений.

Теория ошибок есть математическое учение, в основу которого положены четыре достаточно очевидные свойства случайных ошибок.

Условимся называть случайной ошибкой Δ разность между истинным значением X измеренной величины и ее измеренным значением a, т. е.

$$X - a = \Delta, \tag{1}$$

так что при $X > a$ ошибка Δ будет положительна, а при $X < a$ ошибка Δ будет отрицательна.

Приняв это условие, мы можем основные свойства случайных ошибок формулировать так:

1) одинаковые по абсолютной величине положительные и отрицательные случайные ошибки одинаково возможны, они одинаково часто встречаются в измерениях;

2) при данных условиях измерения (определенный инструмент, наблюдатель, погода, характер местности и пр.) случайные ошибки не могут превосходить по абсолютной величине известного предела;

3) чем меньше абсолютная величина случайной ошибки, тем эта ошибка чаще встречается в измерениях;

4) среднее арифметическое из случайных ошибок одинаково точных измерений одной и той же величины стремится к нулю при неограниченном возрастании числа измерений.

Три первых свойства достаточно очевидны. Для подтверждения четвертого свойства положим, что мы имеем ряд одинаково точных n измерений

$$a_1, \; a_2, \ldots, a_n \tag{2}$$

величины, истинное значение которой X. Пусть случайные ошибки этих измерений соответственно будут

$$\Delta_1, \; \Delta_2, \ldots, \Delta_n. \tag{3}$$

При достаточно большом числе измерений, в ряду (3) ошибок можно ожидать, что ошибки положительные и отрицательные будут встречаться почти в одинаковом числе и это будет тем вернее, чем больше число ошибок. Поэтому, если все эти ошибки сложить, то положительные ошибки будут компенсироваться отрицательными, так что сумма ошибок будет всегда оставаться конечной величиной и притом сравнительно небольшой, как бы ни возрастало число ошибок.

Вследствие этого можно написать, что

$$\lim_{n=\infty} \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n}{n} = 0. \qquad (4)$$

Условимся сокращенно обозначать, по Гауссу, сумму квадратными скобками, т. е.

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n = [\Delta]. \qquad (5)$$

Тогда можно написать, что

$$\lim_{n=\infty} \frac{[\Delta]}{n} = 0. \qquad (6)$$

§ 3. Принцип арифметической средины.

На основании последнего свойства случайных ошибок можно сделать весьма важный практический вывод, а именно: сохраняя обозначения предыдущего параграфа, напишем по условию (1) ряд равенства:

$$\begin{aligned} X - a_1 &= \Delta_1 \\ X - a_2 &= \Delta_2 \\ &\ldots\ldots \\ X - a_n &= \Delta_n \end{aligned} \qquad (7)$$

Складывая левые и правые части этих равенств, получим

$$nX - a_1 - a_2 - \ldots - a_n = \Delta_1 + \Delta_2 + \ldots + \Delta_n$$

или, по Гауссу

$$nX - [a] = [\Delta],$$

откуда

$$X = \frac{[a]}{n} + \frac{[\Delta]}{n} \qquad (8)$$

Обозначим $\frac{[a]}{n}$ через x_0, а $\frac{[\Delta]}{n}$ через ζ, так что

$$\frac{[a]}{n} = x_0 \qquad (9)$$

$$\frac{[\Delta]}{n} = \zeta. \qquad (10)$$

Согласно этих обозначений формула (8) примет вид

$$X = x_0 + \zeta. \qquad (11)$$

Величина x_0 называется *арифметической срединой* измеренных значений величины X, а ζ есть случайная ошибка этой арифметической средины.

На основании четвертого свойства случайных ошибок (6) можно написать, что

$$\lim_{n=\infty} \zeta = 0,$$

а потому

$$\lim_{n=\infty} x_0 = X, \qquad (12)$$

т. е. *арифметическая средина одинаково точных измерений одной и той же величины стремится к истинному значению этой величины при неограниченном возрастании числа измерений.*

На основании этого принято считать арифметическую средину одинаково точных измерений одной и той же величины наиболее надежным результатом этих измерений при всяком числе их.

§ 4. Средняя квадратическая ошибка.

Для оценки точности измерений в теории ошибок введено понятие о *средней квадратической ошибке.*

Под средней крадратической ошибкой подразумевают выражение

$$\pm\sqrt{\frac{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\ldots\Delta_n^2}{n}}.$$

Условимся обозначать среднюю квадратическую ошибку через m, так что

$$m=\pm\sqrt{\frac{\Delta_1^2+\Delta_2^2+\ldots+\Delta_n^2}{n}}=\pm\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}. \qquad (13)$$

Средняя квадратическая ошибка является весьма подходящим мерилом точности произведенных измерений, мерилом достоинства данного ряда измерений, характеристикой данных условий измерений.

Это происходит потому, что:

1) на величину средней квадратической ошибки оказывают сравнительно сильное влияние большие по абсолютной величине случайные ошибки, т. е. как раз те, которые и определяют собою степень надежности полученных результатов измерений;

2) средняя квадратическая ошибка обладает достаточной устойчивостью, так что практически достаточно сравнительно небольшого числа измерений для того, чтобы определить значение этой ошибки с удовлетворительной степенью точности;

3) по средней квадратической ошибке можно судить о предельной ошибке, возможной при данных условиях измерений. Это достигается при помощи установленного теоретическими изысканиями и

подтвержденного опытным путем правила, по которому абсолютная величина случайной ошибки измерения не превосходит утроенной средней квадратической ошибки.

$$\Delta_{пред} = 3m. \tag{14}$$

§ 5. Средняя квадратическая ошибка арифметической средины.

Определим теперь среднюю квадратическую ошибку арифметической средины. Для этого предположим, что нами было произведено большое число s рядов измерений одной и той же величины X, полученных при одинаковых условиях измерения, по n измерений в каждом ряду,

$$\left.\begin{array}{l} a_1', \ a_2', \ldots, a_n' \\ a_1'', \ a_2'', \ldots, a_n'' \\ \ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_1^{(s)}, a_2^{(s)}, \ldots a_n^{(s)}. \end{array}\right\} \tag{15}$$

Пусть истинные ошибки этих рядов измерений будут соответственно

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1', \ \Delta_2', \ldots, \Delta_n' \\ \Delta_1'', \Delta_2', \ldots, \Delta_n'' \\ \ldots\ldots\ldots \\ \Delta_1^{(s)}, \Delta_2^{(s)}, \ldots, \Delta_n^{(s)} \end{array}\right\} \tag{16}$$

Из каждого ряда измерений (15) можно определить арифметическую средину. Обозначим их соответственно через

$$x_0', \ x_0'', \ldots\ldots, x_0^{(s)}, \tag{17}$$

а случайные ошибки этих арифметических средин через

$$\zeta', \ \zeta'', \ldots, \zeta^{(s)}. \tag{18}$$

Средняя квадратическая ошибка ряда (17) арифметических средин, которую мы обозначим через M определится на основании ряда (18) ошибок по формуле

$$M = \pm\sqrt{\frac{[\zeta^2]}{s}}. \tag{19}$$

Согласно формулы (10), можно каждую ошибку ζ представить в виде

$$\zeta = \frac{[\Delta]}{n},$$

откуда

$$n\zeta = [\Delta],$$

или, возводя в квадрат обе части равенства,

$$n^2\zeta^2 = [\Delta^2] + 2\,[\Delta_k\Delta_e],$$

где под $[\Delta_k\Delta_e]$ разумеется сумма парных произведений случайных ошибок.

Применяя это равенство к каждому из s рядов ошибок (16) будем иметь

$$\begin{gathered} n^2\zeta'^2 = [\Delta'^2] + 2\,[\Delta_k'\Delta_e'] \\ n^2\zeta''^2 = [\Delta''^2] + 2\,[\Delta_k''\Delta_e''] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ n^2\zeta^{(s)2} = [\Delta^{(s)2}] + 2\,[\Delta_k^{(s)}\Delta_e^{(s)}], \end{gathered}$$

откуда, по сложении

$$n^2\,[\zeta^2] = \Big[[\Delta^2]\Big] + 2\Big[[\Delta_k\Delta_e]\Big]. \tag{20}$$

В правой части этого равенства первый член представляет собою сумму ns положительных слагаемых квадратов всех ошибок s рядов (16).

При s большом можно положить, согласно (13), что

$$m = \pm\sqrt{\frac{\Big[[\Delta^2]\Big]}{ns}},$$

где m есть средняя квадратическая ошибка отдельного измерения совокупности рядов (15).

Таким образом,

$$\Big[[\Delta^2]\Big] = nsm^2. \tag{21}$$

Следовательно, первый член правой части равенства (20) увеличивается с увеличением числа s.

Второй член того же равенства $2\Big[[\Delta_k\Delta_e]\Big]$, состоит из слагаемых, частью положительных, частью отрицательных, так что при большом числе s, этот член по сравнению с $\Big[[\Delta^2]\Big]$ делается незначительным. Отбросив его, мы получаем приближенное равенство.

$$n^2\,[\zeta^2] = \Big[[\Delta^2]\Big],$$

или по (21).

$$n^2\,[\zeta^2] = nsm^2.$$

По разделении на n^2s, получим

$$\frac{[\zeta^2]}{s} = \frac{m^2}{n},$$

откуда, согласно (19),

$$M^2 = \frac{m^2}{n},$$

или

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}}. \tag{22}$$

Следовательно, *средняя квадратическая ошибка арифметической средины измерений, произведенных при одинаковых условиях, обратно пропорциональна корню квадратному из числа измерений.*

§ 6. Вероятнейшие ошибки и их применение к вычислению средней квадратической ошибки.

Формула (13) средней квадратической ошибки на практике редко применяется при вычислениях, так как в нее входят случайные ошибки измерений, истинная величина коих нам обычно неизвестна.

Для получения применяемой на практике формулы положим, что имеем ряд одинаково точных измерений величины X:

$$a_1, \; a_2, \ldots, a_n$$

со случайными ошибками

$$\Delta_1, \; \Delta_2, \ldots \Delta_n.$$

Пишем, по условию (1), ряд равенств

$$\left.\begin{array}{l} X - a_1 = \Delta_1 \\ X - a_2 = \Delta_2 \\ \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \\ X - a_n = \Delta_n \end{array}\right\} \qquad (23)$$

Обозначим разности между арифметической срединой x_0 и каждым отдельным измерением соответственно через

$$\delta_1, \; \delta_2, \ldots \delta_n.$$

Будем иметь:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 - a_1 = \delta_1 \\ x_0 - a_2 = \delta_2 \\ \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \\ x_0 - a_n = \delta_n \end{array}\right\} \qquad (24)$$

Так как арифметическая средина представляет собою вероятнейший результат измерений, то и величины $\delta_1, \delta_2, \ldots \delta_n$ принято называть *вероятнейшими* ошибками измерений. В отличие от них случайные ошибки $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$ называются *истинными* ошибками измерений.

Составим разности левых и правых частей соответственных равенств (23) и (24).

Получим

$$\begin{array}{l} X - x_0 = \Delta_1 - \delta_1 \\ X - x_0 = \Delta_2 - \delta_2 \\ \;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;.\;\;. \\ X - x_0 = \Delta_n - \delta_n. \end{array}$$

Учитывая, на основании равенства (11), что

$$X - x_0 = \zeta,$$

будем иметь

$$\left.\begin{array}{l} \Delta_1 = \delta_1 + \zeta \\ \Delta_2 = \delta_2 + \zeta \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Delta_n = \delta_n + \zeta \end{array}\right\} \qquad (25)$$

Возводя в квадрат обе части каждого равенства, получим

$$\begin{array}{l} \Delta_1^2 = \delta_1^2 + \zeta^2 + 2\zeta\delta_2 \\ \Delta_2^2 = \delta^2 + \zeta^2 + 2\zeta\delta_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Delta_n^2 = \delta_n^2 + \zeta^2 + 2\zeta\delta_n, \end{array}$$

откуда, по сложении

$$[\Delta^2] = [\delta^2] + n\zeta^2 + 2\zeta[\delta]. \qquad (26)$$

С другой стороны, складывая левые и правые части равенств (24), имеем

$$nx_0 - [a] = [\delta],$$

а так как по обозначению равенства (9)

$$x_0 = \frac{[a]}{n},$$

то

$$[\delta] = 0, \qquad (27)$$

т. е. *сумма вероятнейших ошибок равноточных измерений при всяком числе измерений равна нулю.*

На основании этого положения равенство (26) примет вид

$$[\Delta^2] = [\delta^2] + n\zeta^2,$$

откуда, по разделении на n,

$$\frac{[\Delta^2]}{n} = \frac{[\delta^2]}{n} + \zeta^2,$$

или по обозначению (13)

$$m^2 = \frac{[\delta^2]}{n} + \zeta^2. \qquad (28)$$

В правой части этого равенства при достаточно большом n член $[\delta^2]/n$ имеет довольно устойчивый характер, тогда как величина ζ с увеличением числа измерений имеет тенденцию уменьшаться.

В виду этого в равенстве (28) член ζ^2, как второстепенный, можно заменить его средним значением, т. е. через M^2.

Тогда

$$m^2 = \frac{[\delta^2]}{n} + M^2,$$

а так как по (22)

$$M = \frac{m}{\sqrt{n}},$$

то

$$m^2 = \frac{[\delta^2]}{n} + \frac{m^2}{n},$$

откуда, по преобразовании, получим

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\delta^2]}{n-1}}. \qquad (29)$$

Пример: Измерен угол при одинаковых условиях девять раз результаты измерений даны во втором столбце нижеприведенной таблицы. Требуется определить вероятнейшую величину угла и оценить точность этого определения.

№№ по порядку	Измеренные значения угла	δ	δ^2
1	72° 13′ 38″.3	+ 1″.1	1.21
2	44.6	— 5.2	27.04
3	33.7	+ 5.7	32.49
4	41.1	— 1.7	2.89
5	43.0	— 3.6	12.96
6	36.2	+ 3.2	10.24
7	39.6	— 0.2	0.04
8	37.8	+ 1.6	2.56
9	40.3	— 0.9	0.81
	72° 13′ 39″.4	0″.0	90.24

Для получения вероятнейшего значения угла нужно определить арифметическую средину из девяти измеренных данных. При этом, для упрощения вычислений, нужно взять приближенное значение угла (в данном случае удобно взять 72° 13′ 30″), а из остатков брать среднее, которое затем надлежит придать к приближенному значению угла. Получится 72° 13′ 39″,4.

Этот результат подписывается во втором столбце под черт. Затем, надлежит составить разности между арифметической средино и каждым отдельным измерением (вероятнейшие ошибки δ).

Поверкой будет служить то, что сумма этих разностей по (27) должна дать нуль.

Далее полученные разности возводятся в квадрат и результаты суммируются.

Теперь, по формулам (29) и (22), можно вычислить среднюю квадратическую ошибку арифметической средины (M), а именно:

$$m=\pm\sqrt{\frac{[\delta^2]}{n-1}}=\pm\sqrt{\frac{90.24}{8}}=\pm\sqrt{11.28},$$

или

$$m=\pm 3''.4,$$

а

$$M=\frac{m}{\sqrt{n}}=\pm\frac{3''.4}{\sqrt{9}},$$

или

$$M=\pm 1''.1.$$

Предельная ошибка при данных условиях измерения равна, согласно (14),

$$\Delta_{пред.}=3m=\pm 10''.2.$$

В ряду ошибок δ мы находим величины, достигающие лишь половины предельной ошибки (5''.7).

§ 7. Вероятная ошибка.

В теории ошибок измерений находит применение понятие о так называемой *вероятной* ошибке измерения (не нужно смешивать с *вероятнейшей* ошибкой).

Вероятной ошибкой называется такое значение случайной ошибки, по отношению к которому, при данных условиях измерения, ошибки большие этого значения также часто встречаются, как и ошибки меньшие его.

Теоретические исследования показывают, что вероятная ошибка составляет, примерно, $^2/_3$ средней, т. е.

$$r=\frac{2}{3}m\ ^{*)}. \tag{30}$$

Здесь через r обозначена вероятная ошибка.

---

*) Более точно $r=0{,}6745\ldots m$

Пример. Даны 17 истинных ошибок равноточных измерений углов:

№№ по порядку	Δ	Δ²	№№ по порядку	Δ	Δ²
1	+ 8″.9	79.21	10	+ 1″.3	3.24
2	+ 1.2	1.44	11	+ 2.6	6.76
3	— 7.2	51.84	12	+ 1.9	3.61
4	+ 9.8	96.04	13	+ 1.2	1.44
5	— 4.7	22.09	14	+ 5.6	31.36
6	+ 9.6	92.16	15	+ 0,4	0.16
7	+ 9.9	98.01	16	— 0.1	0.01
8	— 10.0	100.00	17	+ 5.1	26.01
9	— 10.0	106.09		Σ =	119.47

На основании этого ряда

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}} = \pm\sqrt{\frac{119.47}{17}} = \pm 6''.5,$$

откуда

$$r = \frac{2}{3}m = \pm 4''.3.$$

Для поверки расположим данные ошибки в порядке возрастания по абсолютной величине. Будем иметь

0″.1, 0″.4, 1″.2, 1″.2, 1″.8, 1″.9, 2″.6, 4″.7, 5″.1,
5″.6, 7″.2, 8″.9, 9″.6, 9″.8, 9″.9, 10″.0, 10″.3.

Посредине этого ряда лежит ошибка 5″.1. Ошибок, меньших ее, столько же, сколько и ошибок больших ее. Следовательно, величина 5″ · 1 и определяет собою, приблизительно, размер вероятной, при данных условиях измерения, ошибки.

Для получения более точного значения вероятной ошибки нужно иметь очень большой ряд измерений.

§ 8. Функции измеренных величин.

Одной из задач теории ошибок является указание правил, на основании которых можно оценить точность полученных результатов измерений, или произведенных на основании этих данных вычислений.

Мы уже знаем, как оценить точность арифметической средины ряда одинаково точных измерений. Установим теперь формулы для оценки точности различных функций измеренных количеств.

Подобная оценка всегда имеет место там, где производятся вычисления на основании измеренных данных.

Рассмотрим сначала простейшие частные случаи.

I. Имеем функцию вида

$$Y = kX, \tag{31}$$

где k есть постоянное число.

Пусть для определения величины X произведен ряд измерений при одинаковых условиях:

$$a_1,\ a_2, \ldots .\ a_n$$

со случайными ошибками соответственно

$$\Delta_1,\ \Delta_2, \ldots, \Delta_n. \tag{32}$$

Тогда, для величины Y мы можем по формуле (31) получить ряд измеренных, вернее, вычисленных значений

$$ka_1,\ ka_2, \ldots, ka_n, \tag{33}$$

случайные ошибки которых обозначим соответственно через

$$\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots, \alpha_n. \tag{34}$$

По определению средней квадратической ошибки будем иметь для величины Y, т. е. для ряда (33)

$$m_y = \pm \sqrt{\frac{[\alpha^2]}{n}}. \tag{35}$$

Определим величины ошибок α ряда (34). По условию (1) можем написать

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= Y - ka_1 = kX - ka_1 = k(X - a_1) = k\Delta_1 \\
\alpha_2 &= Y - ka_2 = kX - ka_2 = k(X - a_2) = k\Delta_2 \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_n &= Y - ka_n = kX - ka_n = k(X - a_n) = k\Delta_n,
\end{aligned}$$

а потому, согласно (35),

$$m_y = \pm \sqrt{\frac{\left[[k\Delta]^2\right]}{n}} = \pm k \cdot \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}.$$

А так как средняя квадратическая ошибка величины X определяется по (32) формулой

$$m_x = \pm \sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}},$$

то

$$m_y = km_x. \tag{36}$$

II. Имеем функцию вида

$$Y = X + Z. \tag{37}$$

Пусть для определения величины X был произведен ряд одинаково точных измерений

$$a_1, a_2, \ldots a_n, \tag{38}$$

со случайными ошибками

$$\Delta_1', \Delta_2', \ldots, \Delta_n', \tag{39}$$

а измерения величины Z, произведенные также при одинаковых условиях, дали значения:

$$b_1, b_2, \ldots b_n \tag{40}$$

со случайными ошибками

$$\Delta_1'', \Delta_2'', \ldots \Delta_n''. \tag{41}$$

На основании рядов (39) и (41) ошибок получим величины:

$$m_x = \pm\sqrt{\frac{[\Delta'^2]}{n}}$$

и

$$m_z = \pm\sqrt{\frac{[\Delta''^2]}{n}}, \tag{42}$$

которые и характеризуют собою условия измерений величины X и Z.

На основании рядов измерений (38) и (40) величин X и Z мы можем вычислить для величины Y ряд значений

$$(a_1 + b_1),\ (a_2 + b_2), \ldots\ (a_n + b_n). \tag{43}$$

Случайные ошибки этих значений обозначим через

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n. \tag{44}$$

Тогда средняя квадратическая ошибка измерения величины Y представится в виде

$$m_y = \pm\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}. \tag{45}$$

Определим значения случайных ошибок ряда (43). Имеем

$$\Delta_1 = Y - (a_1 + b_1) = X + Z - (a_1 + b_1) = (X - a_1) + (Z - b_1) = \Delta'_1 + \Delta''_1;$$
$$\Delta_2 = Y - (a_2 + b_2) = X + Z - (a_2 + b_2) = (X - a_2) + (Z - b_2) = \Delta'_2 + \Delta''_2;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta_n = Y - (a_n + b_n) = X + Z - (a_n + b_n) = (X - a_n) + (Z - b_n) = \Delta'_n + \Delta''_n.$$

Возведение в квадрат дает:

$$\Delta_1^2 = \Delta_1'^2 + \Delta_1''^2 + 2\Delta'_1\Delta''_1;$$
$$\Delta_2^2 = \Delta_2'^2 + \Delta_2''^2 + 2\Delta'_2\Delta''_2;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Delta_n^2 = \Delta_n'^2 + \Delta_n''^2 + 2\Delta'_n\Delta''_n.,$$

Откуда

$$[\Delta^2] = [\Delta'^2] + [\Delta''^2] + 2[\Delta'\cdot\Delta''],$$

а по разделении на n

$$\frac{[\Delta^2]}{n} = \frac{[\Delta'^2]}{n} + \frac{[\Delta''^2]}{n} + 2 \cdot \frac{[\Delta' \cdot \Delta'']}{n},$$

или, на основании (42) и (45),

$$m_y^2 = m_x^2 + m_z^2 + 2\frac{[\Delta' \cdot \Delta'']}{n}. \qquad (46)$$

Так как произведения $\Delta'_1 \cdot \Delta''_1$, $\Delta'_2 \cdot \Delta''_2, \ldots\ldots \Delta_n' \cdot \Delta_n''$ составлены каждое из ошибок, не входящих в другие произведения, то этот ряд произведений обладает всеми свойствами случайных ошибок, а потому при большом числе n измерений последний член правой части равенства (46) можно считать близким к нулю, так что его можно отбросить.

Тогда получим

$$m_y^2 = m_x^2 + m_z^2. \qquad (47)$$

Если

$$Y = X - Z, \qquad (48)$$

то, повторяя целиком предыдушие рассуждения, мы увидим, что формула (46) представится для данного случая в виде

$$m_y^2 = m_x^2 + m_z^2 - 2 \cdot \frac{[\Delta' \cdot \Delta'']}{n},$$

а так как при большом числе n последний член правой части написанного равенства можно отбросить, то это равенство примет вид:

$$m_y^2 = m_x^2 + m_z^2, \qquad (49)$$

т. е. окажется совершенно тождественным с равенством (47).

Следовательно, *разность двух измеренных величин определяется с такой же точностью, как и сумма их.* Это положение необходимо особенно иметь в виду при измерениях длин линий, площадей и проч.

III. Имеем функцию вида

$$Y = X + Z + T. \qquad (50)$$

Обозначим $X + Z$ через U, т. е.

$$U = X + Z. \qquad (51)$$

Тогда

$$Y = U + T. \qquad (52)$$

По только что выведенной формуле (47) мы можем написать для функции (52):

$$m_y^2 = m_u^2 + m_t^2, \qquad (53)$$

а для функции (51)

$$m_u^2 = m_z^2 + m_z^2.$$

Подставляя значение m_u^2 в равенство (53), получим

$$m_y^2 = m_x^2 + m_z^2 + m_t^2. \tag{54}$$

IV. Подобным же образом можно доказать, что для функции вида:

$$Y = X + Z + T + \ldots\ldots + W, \tag{55}$$

с любым числом слагаемых,

$$m_y^2 = m_x^2 + m_z^2 + m_t^2 + \ldots\ldots + m_w^2. \tag{56}$$

Очевидно, что сумму $X + Z + T + \ldots\ldots + W$ нужно понимать как алгебраическую сумму.

Частный случай. Если имеем алгебраическую сумму n слагаемых, измеренных с одинаковой средней квадратической ошибкой m, то, полагая в формуле (56)

$$m_x = m_z = m_t = \ldots = m_w = m, \tag{57}$$

будем иметь

$$m_y = m \cdot \sqrt{n}. \tag{58}$$

V. Имеем функцию вида

$$Y = k_1 X + k_2 Z + \ldots\ldots + k_n W. \tag{59}$$

Введем обозначения:

$$\left.\begin{array}{l} k_1 X = X_1 \\ k_2 Z = Z_1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ k_n W = W_1 \end{array}\right\} \tag{60}$$

Тогда

$$Y = X_1 + Z_1 + \ldots\ldots + W_1.$$

На основании формул (55) и (56) можем написать

$$m_y^2 = m_{x1}^2 + m_{z1}^2 + \ldots\ldots + m_{w1}. \tag{61}$$

С другой стороны, принимая во внимание наши обозначения (60), мы на основании формул (31) и (36) будем иметь

$$\begin{array}{l} m_{x1} = k_1 m_x \\ m_{z1} = k_2 m_z \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ m_{w1} = k_n m_w. \end{array}$$

Подставляя эти значения в формулу (61), получим

$$m_y^2 = k_1^2 m_x^2 + k_2^2 m_z^2 + \ldots\ldots + k_n^2 m_w^2. \tag{62}$$

VI. Рассмотрим теперь функцию общего вида:

$$Y = f(X, Z, \ldots\ldots W), \tag{63}$$

где X, Z, ... W суть истинные значения непосредственно измеренных величин. Пусть результаты измерений этих величин будут a, b,... l, их средние квадратические ошибки соответственно m_x, m_z, ... m_w.

Если вместо истинных значений аргументов подставить в формулу (63) их измеренные значения, то мы получим вычисленное значение функции, которое обозначим через q, так что

$$q = f(\bar{a},\ b, \ldots l) \tag{64}$$

Для оценки точности полученного вычислениями результата q, разложим функцию Y (63) по строке Тейлора, обозначив через x_0, z_0, ... w_0 первоначальные значения аргументов, а через α, β, ... λ их приращения.

Тогда

$$Y = f(x_0 + \alpha, z_0 + \beta, \ldots w_0 + \lambda) = f(x_0, z_0, \ldots w_0) +$$
$$+ \frac{\partial f}{\partial x_0} \cdot \alpha + \frac{\partial f}{\partial z_0} \cdot \beta + \ldots + \frac{\partial f}{\partial w_0} \cdot \lambda + \ldots$$

Обозначив значение $f(x_0, z_0, \ldots w_0)$ через y_0, разность $(Y - y_0)$ через ε и останавливаясь лишь на случае, когда приращения функции и аргументов малы, мы можем, ограничиваясь при разложении первыми степенями приращений, придать написанной формуле вид

$$\varepsilon = \frac{\partial f}{\partial z_0} \alpha + \frac{\partial f}{\partial z_0} \beta + \ldots + \frac{\partial f}{\partial w_0} \lambda. \tag{65}$$

Формула (65) может применяться для вычисления поправки к приближенному значению функции — y_0, для получения ее истинного значения. Для этого нужно знать истинные значения поправок аргументов α, β, ... λ.

Но, для этого, со своей стороны, нужно знать истинные значения этих аргументов. Мы же знаем измеренные значения аргументов с средними квадратическими ошибками m_x, m_z, ... m_w. Очевидно, с такими же ошибками мы будем знать и поправки α, β, ..., λ к приближенным значениям аргументов. Вычисляя на основании таких поправок поправку ε к приближенному значению функции y_0 и прибавив эту поправку к y_0, мы найдем не истинное значение функции, а ее вычисленное значение q, ошибочное настолько, насколько ошибочна поправка ε. Отсюда мы видим, что средняя квадратическая ошибка величины ε равна средней квадратической ошибке величины Y, так что мы можем написать

$$m_\varepsilon = m_y.$$

Но, согласно (65), поправка ε есть линейная функция поправок α, β, ... λ рассмотренного выше типа (59), при чем здесь роль коэффициентов k_1, k_2, ... k_n играют частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x_0}, \frac{\partial f}{\partial z_0}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial w_0},$$

вычисленные при измеренных значениях аргументов. Применяя к данному случаю формулу (62) средний квадратической ошибки такой функции, получим

$$m_y^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)^2 \cdot m_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z_0}\right)^2 \cdot m_z^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial w_0}\right)^2 \cdot m_w^2. \qquad (66)$$

§ 9. Ошибка округления при отсчете.

При всяком измерении, последней его стадией является отсчет. Отсчет всегда сопровождается особой ошибкой, происходящей от округления результата измерения. Так, при измерении длин линий мы округляем результат измерений до 0,01 саж., до 1^{mm}, при измерении углов ограничиваемся при отсчете минутами, секундами угла и т. д.

В отношении ошибки округления при отсчете обыкновенно можно бывает довольно точно указать предельную ошибку округления. Она равняется половине единицы того разряда, на котором происходит округление. Так, при округлении до $0^m,1$ можно считать предельную ошибку округления около 5^{cm}; при округлении углов до $1'$ нужно считать предельную ошибку округления около $^1/_2{}'$.

Далее, не все свойства случайных ошибок справедливы для ошибок округления, а именно: все значения ошибки округления, по абсолютной величине меньшие предельной,—равновозможны, так что третье из перечисленных в § 2 свойств случайных ошибок для ошибок округления не имеет места.

Но, так как при выводе в предыдущих параграфах формул для средних квадратических ошибок мы этим третьим свойством ошибок не пользовались, то все сделанные выводы остаются в силе и для ошибок округления. Только связь между средней квадратической ошибкой и предельной ошибкой, а также между ней и вероятной ошибкой будет в этом случае иная.

Для установления этой связи предположим, что ошибка округления, изменяясь через промежутки ε, имеет своим предельным значением величину α.

Полагая, что ε содержится в α n раз, т. е.

$$\alpha = n\varepsilon, \qquad (67)$$

мы можем написать ряд всевозможных значений, которые может принять в нашем случае абсолютная величина ошибки округления

$$0,\ \varepsilon,\ 2\varepsilon,\ 3\varepsilon, \ldots, n\varepsilon. \qquad (68)$$

Число членов этого ряда равно $(n+1)$.

Так как все эти ошибки ряда (68) равновозможны, то при неограниченно большом числе измерений каждая из них должна повториться примерно одинаковое число раз, а потому для вычисления средней квадратической ошибки округления достаточно взять среднюю квадратическую ошибку из ошибок ряда (68). Будем иметь:

$$m = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2 + (2\varepsilon)^2 + (3\varepsilon)^2 + \ldots + (n\varepsilon)^2}{n+1}},$$

$$m = \pm \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots . + n^2}{n+1}},$$

Но известно, что

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots . + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

а потому

$$m = \pm \varepsilon \cdot \sqrt{\frac{n(2n+1)}{6}}.$$

Так как по (67)

$$\varepsilon = \frac{a}{n},$$

тс

$$m = \pm a \cdot \sqrt{\frac{2n+1}{6n}},$$

или

$$m = \pm a \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{1}{6n}}.$$

При $n = \infty$ формула примет вид:

$$m = \pm \frac{a}{\sqrt{3}},$$

откуда

$$a = \pm \sqrt{3} \cdot m = \pm 1{,}7m. \tag{69}$$

Отсюда вывод: если ошибка округления значительна по сравнению с ошибками, происходящими от других источников, то предельную ошибку результата измерения нужно считать ниже утроенной средней квадратической ошибки, т. е.

$$\Delta_{пред} < 3m. \tag{70}$$

С другой стороны, так как, вообще говоря, мелкие ошибки встречаются в измерениях чаще крупных, то исходя из формулы (69), нужно признать, что во всяком случае

$$\Delta_{пред} > 2m, \tag{71}$$

за исключением случая, когда ошибка округления подавляет своей величиной все иные виды возможных в данном измерении ошибок, т. е. когда ошибка округления *груба* для данных условий измерения.

ГЛАВА II.

Примеры приложения теории ошибок в геодезической практике.

§ 10. Угломерная съемка.

Пример 1. Лента уложилась в длине линии n раз. Средняя квадратическая ошибка одного отложения равна m. Определить среднюю квадратическую ошибку m_l измерения всей линии.

Последовательное откладывание длины ленты соответствует действию сложения. Считая все отложения ленты равноточными, мы можем применить к нашему случаю формулу (58). В результате получим

$$m_l = m \cdot \sqrt{n}.$$

Принимая длину линии равной l, а длину мерного прибора равной a, будем иметь

$$l = an,$$

откуда

$$m_l = m\sqrt{\frac{l}{a}} = \frac{m}{\sqrt{a}}\sqrt{l}.$$

Обозначая постоянную для мерного прибора и определенных условий измерения величину $\frac{m}{\sqrt{a}}$ через μ,

$$\mu = \frac{m}{\sqrt{a}}, \tag{72}$$

получим

$$m_l = \mu \cdot \sqrt{l}. \tag{73}$$

Здесь коэффициент μ при прочих равных условиях зависит от свойств поверхности земли в том месте, где происходит измерение линии.

Пример 2. Определить среднюю квадратическую ошибку m измерения угла теодолитом.

Пусть средняя квадратическая ошибка отсчета, соответствующего направлению по одной стороне угла A, равна t. Так как угол определяется как разность отсчетов по двум сторонам угла, то, применяя формулу (58), получим

$$m = t \cdot \sqrt{2}. \qquad (74)$$

Если угол определен как среднее из двух измерений при разных положениях зрительной трубы, то его средняя квадратическая ошибка M на основании формулы (22) примет вид

$$M = \frac{m}{\sqrt{2}} = t. \qquad (75)$$

Если принять в расчет влияние на величину измеряемого угла внецентренного положения инструмента, неправильной установки и наклона вехи, то средняя квадратическая ошибка измеряемого угла выразится по формуле (56)

$$m^2 = m_1{}^2 + m_2{}^2 + m_3{}^2, \qquad (76)$$

где m_1 есть среднее влияние инструментальных ошибок и личных качеств наблюдателя, m_2 — среднее влияние внецентренного положения инструмента, m_3 — среднее влияние неправильной установки и наклона вех.

Пример 3. Определение предельной невязки в сумме n измеренных углов сомкнутого полигона.

Полагая все углы измеренными при одинаковых условиях со средней квадратической ошибкой m, мы можем написать для средней квадратической ошибки M суммы n углов по формуле (58)

$$M = m \cdot \sqrt{n}.$$

Считая, что предельная ошибка равна утроенной средней квадратической ошибке, будем иметь

$$T_{пред} = \Delta_{пред} \cdot \sqrt{n}, \qquad (77)$$

где $\Delta_{пред}$ есть предельная ошибка одного угла, а $T_{пред}$ — предельная величина невязки в сумме углов полигона.

Так, для одноминутного теодолита при достаточно длинных сторонах угла $m = 0',5$, а потому

$$T_{пред} = 1',5 \sqrt{n} \qquad (77a)$$

Пример 4. Определение средней величины перемещения конца линии под влиянием ошибок в длине и направлении линии.

Мы имеем формулы приращений координат

$$\Delta x = l \cos\alpha, \quad \Delta y = l \sin\alpha.$$

Здесь Δx и Δy — функции l и α.

Применяя общую формулу (66) к данному случаю, получим

$$m_x{}^2 = \cos^2\alpha \cdot m_l{}^2 + l^2 \sin^2\alpha \cdot m_\alpha{}^2 . \sin^2 1'$$
$$m_y{}^2 = \sin^2\alpha \cdot m_l{}^2 + l^2 \cos^2\alpha \cdot m_\alpha{}^2 \cdot \sin^2 1',$$

или, после простых преобразований,

$$m_x^2 = \frac{\Delta x^2}{l^2} \cdot m_e^2 + \Delta y^2 \cdot m_a^2 \cdot \sin^2 1'$$

$$m_y^2 = \frac{\Delta y^2}{l^2} \cdot m_e^2 + \Delta x^2 \cdot m_a^2 \cdot \sin^2 1',$$

а, принимая во внимание формулу (73),

$$m_x^2 = \frac{\Delta x^2}{l} \cdot \mu^2 + \Delta y^2 \cdot m_a^2 \cdot \sin^2 1'$$

$$m_y^2 = \frac{\Delta y^2}{l} \cdot \mu^2 + \Delta x^2 \cdot m_a^2 \cdot \sin^2 1'.$$

m_x и m_y — проекции средней величины перемещения m конца линии по оси абсцисс и ординат, а потому

$$m^2 = m_x^2 + m_y^2,$$

или

$$m^2 = l \cdot \mu^2 + l \cdot m_a^2 \sin^2 1'. \qquad (78)$$

§ 11. Нивелирование.

Пример 5. Определение средней ошибки взгляда на рейку.

Известно из опыта, что при определении разности уровней двух смежных пикетов два раза одним и тем же нивелиром, разница между обоими результатами бывает обычно в пределах 4 миллиметров при расстоянии между пикетами около 100 метров. Будем считать эту величину предельной. Значит, в нашем случае среднюю квадратическую ошибку разности d двойных измерений превышения на одной станции можно принять равной $1^1/_3$ мм.

$$m_d = \pm 1^1/_3 \text{ мм.} \qquad (79)$$

Пусть при первом измерении взгляд назад был a_1, взгляд вперед b_1, а при втором измерении соответственно получили результаты a_2 и b_2.

Тогда будем иметь

$$h' = a_1 - b_1$$

$$h'' = a_2 - b_2,$$

откуда

$$d = h' - h'' = a_1 - b_1 - a_2 + b_2;$$

значит, d есть алгебраическая сумма четырех равноточных взглядов на рейке, а потому по формуле (58) можем написать

$$m_d = m \cdot \sqrt{4} = 2m,$$

где m есть средняя квадратическая ошибка взгляда.

На основании (79) имеем

$$m = \frac{1}{2} m_{\text{д}} = \pm \frac{2}{3} \text{ мм.} \tag{80}$$

Пример 6. Определение средней квадратической ошибки превышения на одной станции:

$$m_h = m \cdot \sqrt{2} = 1 \text{ мм.} \tag{81}$$

Пример 7. Определение средней квадратической ошибки нивелирного хода.

Из теории нивелирования известно, что разность уровней начала и конца нивелирного хода, состоящего из n станций, определяется формулой

$$U = \sum_1^n h = \sum_1^n (a - b) = \sum_1^n a - \sum_1^n b.$$

Применяя формулу (58) к данному случаю, получим

$$m_{\text{и}} = m_h \cdot \sqrt{n} = m \cdot \sqrt{2n}. \tag{82}$$

Предположим, что расстояние между пикетами нивелирного хода везде одинаково и везде равно l.

Пусть длина нивелирного хода будет L, при чем L и l выражены в километрах. Тогда

$$n = \frac{L}{l},$$

а потому

$$m_{\text{и}} = m_h \sqrt{\frac{L}{l}} = \frac{m_h}{\sqrt{l}} \cdot \sqrt{L} = \frac{m}{\sqrt{l}} \cdot \sqrt{2L}.$$

Положим

$$m = c \cdot l; \tag{83}$$

тогда

$$m_{\text{и}} = \sqrt{2} \cdot c \cdot \sqrt{l} \cdot \sqrt{L}. \tag{84}$$

Отсюда можно сделать два вывода:

1) при определенном расстоянии между пикетами и прочих равных условиях точность определения разности уровней начала и конца нивелирного хода пропорциональна корню квадратному из длины хода;

2) при постоянном коэффициенте c точность нивелирования обратно пропорциональна расстоянию между пикетами.

Остановимся несколько подробно на втором положении, так как первое представляется достаточно ясным.

Второе положение требует постоянства коэффициента c, а это последнее равносильно пропорциональности между средней квадратической ошибкой взгляда и расстоянием от нивелира до рейки, согласно (83).

Существует ли такая пропорциональность и при каких условиях? Главными источниками ошибок взгляда на рейку являются: оптическая сила трубы, чувствительность уровня, наклон рейки, округление при отсчете.

Оптическая сила трубы и чувствительность уровня действительно влияют на отсчет по рейке тем меньше, чем меньше расстояние от нивелира до рейки.

Ошибка от наклона рейки, наоборот, совсем не зависит от расстояния, а только от угла наклона рейки и от высоты отсчета над основанием рейки. При достаточно внимательной установке рейки на местности ровной, влияние этого источника ошибок можно считать второстепенным.

Что касается округления при отсчете, то с того момента, когда деления рейки в трубу видны ясно и когда, следовательно, оценка десятой доли деления является вполне возможной, дальнейшее приближение рейки к нивелиру не уменьшает ошибки округления, ибо точнее десятой доли оценку на глаз все равно сделать нельзя.

Таким образом, на местности ровной коэффициент c можно считать постоянным до тех пор, пока ощибка округления не сделается доминирующей. Этот момент и определяет собою наиболее благоприятное расстояние от нивелира до рейки.

Для нивелиров с увеличением 25—30 и с ценою деления уровня 10″—20″, т. е. для нивелиров, обычно применяющихся при технических нивелировках, практически признано наиболее целесообразным брать расстояние от нивелира до рейки в 50 метров.

Пример 8. Определение предельной ошибки на 1 километр при нивелировании.

Полагая $l = 100$ метрам $= 0{,}1$ километра и приняв в формуле (82) $n = 10$, а $m = {}^2/_3$ мм, по (80), будем иметь для средней квадратической ошибки M на километр технического нивелирования

$$M = \pm\, {}^2/_3 \cdot \sqrt{20} = \pm\, 3 \text{ мм}.$$

Отсюда предельная ошибка на километр равна

$$\Delta_{пред} = \pm\, 9 \text{ мм} \backsim 1 \text{ см}.$$

Предельная величина разности двойного технического нивелирования будет равна

$$9 \cdot \sqrt{2} \backsimeq 13 \text{ мм на километр двойного хода.}$$

Предельная ошибка для среднего из прямого и обратного нивелирного хода при техническом нивелировании равна

$$\frac{9}{\sqrt{2}} \backsimeq 6 \text{ мм на километр.}$$

Такую именно точность допускает „техническая инструкция по съемке и нивелировке городов“ (издание Высшего Геодезического Управления, 1924 г.)

Приведенные цифровые данные по техническому нивелированию будут верны при условии горизонтальности площадки пикета, на который ставится рейка, при его полной устойчивости при нормальном влиянии рефракции и проч. В противном случае средняя и предельная ошибка на километр должны быть соответственно увеличены. Так, прусская комиссия 1878 года установила размер средней квадратической ошибки при техническом нивелировании в 5 мм на километр хода.

В случае нивелирования крутых покатостей приобретают большее влияние ошибки от наклона рейки, от неверности ее делений и проч., и потому точность работы понижается в $1^1/_2$ и даже в 2 раза.

§ 12. Тахеометрическая съемка.

Пример 9. Определение средней ошибки в высоте конца линии, под влиянием ошибок в длине и угле наклонения этой линии.

Основной частью формулы превышения одной точки над другой при тахеометрической съемке является выражение

$$h = l \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Применяя формулу (66) к нашему случаю, будем иметь

$$m_h^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot m_e^2 + \frac{l^2}{\cos^4 \alpha} m_\alpha^2 \cdot \sin^2 1'. \qquad (85)$$

Отсюда, по преобразовании, принимая $m_e = \mu \cdot \sqrt{l}$, получим

$$m_h^2 = \frac{h^2}{l} \mu^2 + \frac{h^2}{\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha} m_\alpha^2 \cdot \sin^2 1'. \qquad (86)$$

Пример 10. Определение предельной невязки в разности уровней сомкнутого тахеометрического хода.

$$U = \sum_1^n h,$$

а потому

$$m_{\text{и}}^2 = \sum_1^n m_h^2 = \mu^2 \cdot \sum_1^n \frac{h^2}{l} + m_\alpha^2 \cdot \sin^2 1' \cdot \sum_1^n \frac{h^2}{\cos^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha}.$$

Отсюда

$$\Delta^2_{\text{пред}} = 9 m_h^2 = 9 \mu^2 \cdot \sum_1^n \frac{h^2}{l} + 36 \sin^2 1' \cdot m_\alpha^2 \cdot \sum_1^n \frac{h^2}{\sin^2 2\alpha} . \qquad (87)$$

ГЛАВА III.

Неравноточные измерения. Учение о весах.

§ 13. Общая арифметическая средина. Вес измерения.

Если мы имеем ряд неравноточных измерений

$$a_1\,, a_2 \ldots . a_n \tag{88}$$

одной и той же величины X, то для получения из них вероятнейшего значения этой величины нельзя взять просто среднее арифметическое Очевидно, что измерение более точное должно иметь и большее влияние на окончательный результат.

Измерения неравноточные для одной и той же величины могут получиться двояким путем: или путем измерения инструментами разной точности и в разных условиях, или путем измерения этой величины одним и тем же инструментом по несколько раз и взятия из них каждый раз среднего арифметического значения. В зависимости от числа взятых в том или ином случае измерений изменяется и точность результата.

Рассмотрим подробнее второй случай. Пусть для получения результата a_1 искомая величина измерялась некоторым инструментом p_1 раз, при чем получились измеренные значения:

$$b'_1\,,\ b'_2 \ldots . b'_{p1}\,. \tag{89}$$

Для результата a_2 тем же инструментом произведено p_2 измерений с результатами

$$b''_1\,,\ b''_2 \ldots . b''_{p2} \tag{90}$$

и т. д. Наконец, для результата a_n произведено p_n измерений

$$b_1^{(n)}\ , b_2^{(n)} \ldots . b_{pn}^{(n)} \tag{91}$$

На основании этих измерений мы можем написать

$$a_1 = \frac{b'_1 + b'_2 + \ldots . + b'_{p1}}{p_1},$$

$$a_2 = \frac{b''_1 + b''_2 + \ldots . + b''_{p2}}{p_2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n = \frac{b_1^{(n)} + b_2^{(n)} + \ldots . + b_{pn}^{(n)}}{p_n}$$

Откуда

$$\left.\begin{array}{l} b'_1+b'_2+\ldots\ldots+b'_{p1}=a_1 p_1 \\ b''_1+b''_2+\ldots\ldots+b''_{p2}=a_2 p_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ b_1^{(n)}+b_2^{(n)}+\ldots\ldots+b_{pn}^{(n)}=a_n p_n \end{array}\right\} \qquad (92)$$

Но, с другой стороны, ряды измерений (89), (90), (91) сделаны одним и тем же инструментом для одной и той же величины. Значит, для получения окончательного результата нужно взять из них всех среднее арифметическое. Получим

$$x_0=\frac{b'_1+b'_2+\ldots+b'_{p1}+b''_1+b''_2+\ldots+b''_{p2}+\ldots+b_1^{(n)}+b_2^{(n)}+\ldots+b_{pn}^{(n)}}{p_1+p_2+\ldots\ldots+p_n}.$$

Делая замены на основании (92), будем иметь

$$x_0=\frac{a_1 p_1+a_2 p_2+\ldots\ldots+a_n p_n}{p_1+p_2+\ldots\ldots+p_n}. \qquad (93)$$

Это и есть формула так называемой *общей арифметической средины.* Она показывает, что для получения из неравноточных результатов измерений одной и той же величины ее вероятнейшего значения нужно знать, кроме результатов измерения, еще числа $p_1, p_2, \ldots p_n$, Эти числа называются *весами* измерений.

Таким образом, *весом данного результата измерения называется число, показывающее сколько одинаково точных измерений определенным инструментом нужно сделать для того, чтобы среднее арифметическое из них имело такую же точность, как и данный результат измерения.*

В связи с этим и общая арифметическая средина называется иногда *весовым средним.*

§ 14. Средняя квадратическая ошибка измерения с весом равным единице. Относительный характер веса.

Пусть имеем измерения разной точности одной и той же величины

$$a_1, a_2, \ldots\ldots a_n$$

со случайными ошибками

$$\varDelta_1, \varDelta_2, \ldots\ldots \varDelta_n, \qquad (94)$$

с весами

$$p_1, p_2, \ldots\ldots p_n$$

и со средними квадратическими ошибками

$$m_1, m_2, \ldots\ldots m_n.$$

На основании определения веса, мы можем написать, что

$$\left.\begin{aligned} m_1 &= \frac{\mu}{\sqrt{p_1}} \\ m_2 &= \frac{\mu}{\sqrt{p_2}} \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ m_n &= \frac{\mu}{\sqrt{p_n}} \end{aligned}\right\} \tag{95}$$

где μ есть средняя квадратическая ошибка одного измерения предполагаемым инструментом или, что все равно, μ есть средняя квадратическая ошибка измерения, для которого вес $p = 1$.

На основании равенств (95) можно написать, что

$$\mu = m_1 \cdot \sqrt{p_1} = m_2 \cdot \sqrt{p_2} = \ldots . = m_n \cdot \sqrt{p_n}.$$

Отсюда

$$\mu^2 = p_1 m_1^2 = p_2 m_2^2 = \ldots . = p_n m_n^2,$$

или

$$\mu^2 = \frac{p_1 m_1^2 + p_2 m_2^2 + \ldots . + p_n m_n^2}{n},$$

откуда

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{p_1 m_1^2 + p_2 m_2^2 + \ldots . + p_n^2 m_n^2}{n}}.$$

При большом числе измерений мы можем с достаточной точностью заменить под корнем средние квадратические ошибки соответствующими случайными ошибками измерений по (94), и тогда получим

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[p\Delta^2]}{n}} \tag{96}$$

Величину μ для краткости называют средней квадратической ошибкой *единицы* веса.

Если в формуле (93) числителя и знаменателя помножить на произвольное число k, целое или дробное, то получится

$$x_0 = \frac{a_1 p_1 k + a_2 p_2 k + \ldots . + a_n p_n k}{p_1 k + p_2 k + \ldots . p_n k}.$$

Введя обозначения

$$p_1 k = p_1'; \quad p_2 k = p_2'; \ \ldots . p_n k = p_n',$$

будем иметь

$$x_0 = \frac{a_1 p_1' + a_2 p_2' + \ldots . + a_n p_n'}{p_1' + p_2' + \ldots . + p_n'}. \tag{97}$$

Следовательно, веса носят по существу *относительный* характер. Все веса измерений можно увеличить или уменьшить одновременно в любое число раз. От этого величина весового среднего не изменится.

Поэтому, для веса имеется более общее, чем ранее дано, определение: *вес есть величина, обратно пропорциональная квадрату средней квадратической ошибки измерения* (согласно формуле (95).

С изменением весов соответственно изменяется и средняя квадратическая ошибка единицы веса.

§ 15. Вес и средняя квадратическая ошибка общей арифметической средины.

Возвращаясь к § 13, мы видим из формулы 93, что для получения общей арифметической средины мы предложили, что определенным инструментом проделаны ряды (89), (90), (91) одинаково точных измерений одной и той же величины X, причем общее число этих измерений равно

$$p_1 + p_2 + \ldots. + p_n.$$

Принимая во внимание первоначальное определение веса измерения, мы непосредственно приходим к заключению, что $p_1 + p_2 + \ldots. + p_n$ и есть вес P общей арифметической средины

$$P = p_1 + p_2 + \ldots. + p_n, \qquad (98)$$

т. е. *вес общей арифметической средины равен сумме весов, составляющих ее измерений.*

Отсюда, обозначая среднюю квадратическую ошибку общей арифметической средины через M, мы можем написать, что

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{P}} = \frac{\mu}{\sqrt{p_1 + p_2 + \ldots. + p_n}}. \qquad (99)$$

Из формул (96), (98) и (99) можно усмотреть, что с изменением в одно и то же число раз весов отдельных измерений вес общей арифметической средины изменяется во столько же раз, а ее средняя квадратическая ошибка остается, как и должно быть, без изменения.

§ 16. Определение средней квадратической ошибки по вероятнейшим ошибкам неравноточных измерений.

В виду того, что случайные ошибки

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots. \Delta_n$$

ряда неравноточных измерений

$$a_1, a_2, \ldots. a_n$$

одной и той же величины X нам обычно неизвестны, воспользуемся для вычисления средних квадратических ошибок μ и M вероятнейшими ошибками, т. е. уклонениями отдельных измерений от общей арифметической средины.

Имеем по (93)

$$x_0 = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n},$$

где $p_1, p_2, \dots p_n$ суть соответственные веса данных измерений.

Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned} x_0 - a_1 &= \delta_1 \\ x_0 - a_2 &= \delta_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ &\cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_0 - a_n &= \delta_n \end{aligned}\right\} \quad \dots \qquad (100)$$

где $\delta_1, \delta_2, \dots \delta_n$ и есть вероятнейшие ошибки измерений.

Кроме того, имеем по определению (1)

$$\left.\begin{aligned} X - a_1 &= \Delta_1 \\ X - a_2 &= \Delta_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ &\cdot\ \cdot\ \cdot \\ X - a_n &= \Delta_n \end{aligned}\right\} \quad \dots \qquad (101)$$

Вычитая из частей равенств (101) соответствующие части равенств (100), будем иметь

$$\begin{aligned} X - x_0 &= \Delta_1 - \delta_1 \\ X - x_0 &= \Delta_2 - \delta_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ X - x_0 &= \Delta_n - \delta_n, \end{aligned}$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= \delta_1 + \zeta \\ \Delta_2 &= \delta_2 + \zeta \\ \cdot\ \cdot\ &\cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Delta_n &= \delta_n + \zeta \end{aligned}\right\} \qquad (102)$$

где через ζ обозначена истинная ошибка общей арифметической средины, т. е.

$$\zeta = X - x_0. \qquad (103)$$

Возведение в квадрат обеих частей равенств (102) дает

$$\begin{aligned} \Delta_1^2 &= \delta_1^2 + 2\delta_1\zeta + \zeta^2 \\ \Delta_2^2 &= \delta_2^2 + 2\delta_2\zeta + \zeta^2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Delta_n^2 &+ \delta_n^2 + 2\delta_n\zeta + \zeta^2, \end{aligned}$$

откуда, по умножении на соответствующие веса, получим

$$\begin{aligned} p_1\Delta_1^2 &= p_1\delta_1^2 + 2p_1\delta_1\zeta + p_1\zeta^2 \\ p_2\Delta_2^2 &= p_2\delta_2^2 + 2p_2\delta_2\zeta + p_2\zeta^2 \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ p_n\Delta_n^2 &= p_n\delta_n^2 + 2p_n\delta_n\zeta + p_n\zeta^2. \end{aligned}$$

Складывая левые и правые части этих равенств, найдем

$$[p\Delta^2] = [p\delta^2] + 2[p\delta]\zeta + [p]\zeta^2. \tag{104}$$

Для дальнейших упрощений помножим на соответствующие веса обе части равенств (100). Получим

$$\begin{aligned} p_1x_0 - p_1a_1 &= p_1\delta_1 \\ p_2x_0 - p_2a_2 &= p_2\delta_2 \\ &\dots\dots\dots \\ p_nx_0 - p_na_n &= p_n\delta_n, \end{aligned}$$

откуда, по сложении,

$$[p]x_0 - [pa] = [p\delta].$$

Из формулы общей арифметической средины (93) видно, что

$$[p]x_0 = [pa],$$

а потому

$$[p\delta] = 0. \tag{105}$$

Принимая это во внимание, получим из (104)

$$[p\Delta^2] = [p\delta^2] + [p]\cdot\zeta^2,$$

или, по разделении на n,

$$\frac{[p\Delta^2]}{n} = \frac{[p\delta^2]}{n} + \frac{[p]\cdot\zeta^2}{n},$$

а, принимая во внимание (96),

$$\mu^2 = \frac{[p\delta^2]}{n} + \frac{[p]}{n}\zeta^2.$$

Второе слагаемое в правой части равенства при достаточно большом числе измерений является второстепенным членом по малости ошибки ζ, а потому эту ошибку ζ можно заменить ее средним значением M по формуле (99)

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{[p]}}.$$

Будем иметь

$$\mu^2 = \frac{[p\delta^2]}{n} + \frac{[p]}{n}M^2,$$

или

$$\mu^2 = \frac{[p\delta^2]}{n} + \frac{\mu^2}{n}.$$

Определяя отсюда μ, будем иметь

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[p\delta^2]}{n-1}}. \qquad (106)$$

Для средней квадратической ошибки общей арифметической средины будем соответственно иметь

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[p\delta^2]}{(n-1)\cdot[p]}}. \qquad (107)$$

§ 17. Примеры на применение формул общей арифметической средины.

Пример 1. Угол измерялся одним и тем же инструментом в несколько приемов. В первый прием из 6 измерений получилась средняя величина угла 83° 17′ 34″, во второй прием, из 3 измерений — 83° 17′ 41″, в третий прием—из 2 измерений—83° 17′ 29″, в четвертый прием—из 4 измерений—83° 17′ 36″, в пятый прием—из 3 измерений—83° 17′37″. Определить весовое среднее угла и его среднюю квадратическую ошибку.

Вычисления располагаются в нижеследующей схеме

№ приема	Результат измерения a	Вес p	Поправка ε	$p\varepsilon$	δ	$p\delta$	δ^2	$p\delta^2$
1	83°17′34″	6	+ 4″	+ 24″	+ 1″.6	+ 9.6	2.56	15.36
2	83 17 41	3	+ 11	+ 33	− 5 .4	− 16.2	29.16	87.48
3	83 17 29	2	− 1	− 2	+ 6 .6	+ 13.2	43.56	87.12
4	83 17 36	4	+ 6	+ 24	− 0 .4	− 1.6	0.16	0.64
5	83 17 37	3	+ 7	+ 21	− 1 .4	− 4.2	1.96	5.88
	83°17′35″.6	18		100″		+ 0.8		196.78

Вычисление общей арифметической средины, конечно, можно вести непосредственно по формуле (93)

$$x_0 = \frac{[ap]}{[p]},$$

но на практике это вычисление значительно упрощается введением приближенного значения a искомой величины. Примем в нашем случае $a = 83^\circ 17' 30''$.

Обозначим поправки приближенного значения для данных измерений через $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$. Будем иметь

$$\begin{aligned} a_1 &= a + \varepsilon_1 \\ a_2 &= a + \varepsilon_2 \\ &\ldots\ldots \\ a_n &= a + \varepsilon_n. \end{aligned}$$

Подставляя значения $a_1, a_2, \ldots a_n$ в формулу (93) и делая преобразование, получаем

$$x_0 = a + \frac{[\varepsilon p]}{[p]}. \tag{108}$$

Эта формула показывает, что при введении в вычисление приближенного значения a нужно вычисления производить не над самыми измеренными данными, а над их поправками, что, конечно, значительно проще и скорее.

В нашем примере получилось

$$x_0 = 83^\circ 17' 35''.6.$$

Графа $p\delta$ введена в схеме для контроля вычислений, для чего служит формула (105)

$$[p\delta] = 0.$$

В нашем примере $[p\delta]$ получилось равной $+0{,}8$, а не нулю. Это произошло вследствие того, что при вычислении общей арифметической средины мы округлили ее значение до десятой доли секунды.

Применяя формулу (106)

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[p\delta^2]}{n-1}},$$

получим

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{196.78}{4}} = \pm \sqrt{49.19} = \pm 7''.0.$$

По формуле (107)

$$M = \pm \sqrt{\frac{[\delta^2]}{(n-1)\cdot[p]}} = \pm \sqrt{\frac{49.19}{18}} = \pm \sqrt{2.73} = \pm 1''.7.$$

Пример 2. Высота точки A определена по пяти нивелирным ходам с разной точностью. Определить вероятнейшее значение отметки точки A и точность этого определения.

Результаты измерений и их обработка приведены в схеме на следующей странице.

Для отыскания весов по средним квадратическим ошибкам принято на основании второго определения веса,

$$p = \frac{k}{m^2}. \qquad (109)$$

Значение k подбирают с расчетом, чтобы веса выражались преимущественно в десятках и единицах. В нашем случае k удобно взять равным 1/10000.

№№ ходов	Отметки H точки A	Ср. квад. ошибка m	Вес $p = \frac{1}{10000} m^2$	Поправка ε	$p\varepsilon$	δ	δ^2	$p\delta^2$
1	$12^m.356$	$0^m.0021$	23	6	138	$+0.6$	0.36	8.28
2	12 .361	0 .0034	8.7	11	95.7	-4.4	19.36	168.43
3	12 .357	0 .0012	69	7	483	-0.4	0.16	11.04
4	12 .355	0 .0043	5.4	5	27	$+1.6$	2.56	13.82
5	12 .352	0 .0032	9.8	2	19.6	$+4.6$	21.16	207.37
	12 .356.$_6$		115.9		763.3			408.94

$$x_0 = 12.350 + \frac{763.3}{115.9} = 12.356._6$$

Дальнейшие вычисления приведут нас к следующим результатам

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{408.94}{4}} = \pm\sqrt{102.23} = \pm \overset{mm}{10.1}$$

$$M = \pm\sqrt{\frac{102.23}{115.9}} = \pm\sqrt{0.8821} = \pm\overset{mm}{0.94}.$$

Впрочем, величину μ можно было получить иначе. Полагая в формуле (109) $p = 1$ и принимая во внимание, что среднюю квадратическую ошибку единицы веса мы обозначаем через μ, будем иметь

$$1 = \frac{k}{\mu^2},$$

откуда

$$\mu = \pm\sqrt{k},$$

а так как в нашем случае мы взяли $k = 1/10000$, то

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{1}{10000}} = \pm\overset{m}{0}.01 = 10^{mm}.$$

В тех случаях, когда вместо средних квадратических ошибок отдельных результатов измерений нивелирных ходов даются длины этих ходов, то вычисление весов измерений производится по следующему расчету.

По (109)

$$p = \frac{k}{m_u^{2}},$$

а по (84)

$$m_u = \sqrt{2} \cdot c \cdot \sqrt{l} \cdot \sqrt{L}.$$

Отсюда

$$p = \frac{k}{2c^2 \cdot l \cdot L}.$$

Полагая расстояние l между пикетами везде одинаковым, мы можем ввести обозначение

$$\frac{k}{2c^2 \cdot l} = \lambda \tag{110}$$

и считать λ постоянным числом.

Тогда

$$p = \frac{\lambda}{L}. \tag{111}$$

Так как коэффициент k произволен, то произвольно и число λ. Давая коэффициенту λ значения, равные 1, 10, 100 . . . ., его подбирают так, чтобы веса в данном случае выражались небольшими целыми числами.

§ 18. Веса функций измеренных величин.

В § 8 мы познакомились со способами определения средней квадратической ошибки различных функций измеренных величин. На основании выведенных формул, с одной стороны, и определения веса, с другой стороны, мы можем теперь дать формулы для определения весов этих функций.

I. Для функции

$$Y = kX$$

имеем по формуле (36)

$$m_y = k \cdot m_x.$$

По определению веса

$$m_y = \frac{\mu}{\sqrt{p_y}}, \text{ а } m_x = \frac{\mu}{\sqrt{p_x}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\mu}{\sqrt{p_y}} = \frac{k\mu}{\sqrt{p_x}},$$

откуда

$$p_y = \frac{p_x}{k^2}. \tag{112}$$

II. Для функции

$$Y = X \pm Z$$

имеем по формуле (47)

$$m_y^2 = m_x^2 + m_z^2.$$

Но

$$m_y = \frac{\mu}{\sqrt{p_y}}, \quad m_x = \frac{\mu}{\sqrt{p_x}}, \quad m_z = \frac{\mu}{\sqrt{p_z}},$$

откуда, после небольших преобразований,

$$\frac{1}{p_y} = \frac{1}{p_x} + \frac{1}{p_z} \tag{113}$$

III. Таким же образом, для функции

$$Y = X + Z + T + \ldots . + W$$

можно установить, что

$$\frac{1}{p_y} = \frac{1}{p_x} + \frac{1}{p_z} + \frac{1}{p_t} + \ldots . + \frac{1}{p_w}. \tag{114}$$

В частном случае, когда все измерения равноточны

$$p_x = p_z = p_t = \ldots . = p_w = p,$$

то

$$p_y = \frac{p}{\sqrt{n}}. \tag{115}$$

IV. Для функции

$$Y = k_1 \cdot X + k_2 \cdot Z + \ldots . + k_n \cdot W$$

имеем по формуле (62)

$$m_y^2 = k_1^2 \cdot m_x^2 + k_2^2 \cdot m_z^2 + \ldots . + k_n^2 \cdot m^2_w.$$

Но

$$m_y = \frac{\mu}{\sqrt{p_y}}$$

$$m_x = \frac{\mu}{\sqrt{p_x}}$$

$$m_z = \frac{\mu}{\sqrt{p_z}}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$m_w = \frac{\mu}{\sqrt{p_w}}.$$

Подставляя эти значения в формулу средней квадратической ошибки, мы, по сокращении, получим

$$\frac{1}{p_y}=\frac{k_1^{\,2}}{p_x}+\frac{k_2^{\,2}}{p_z}+\ldots\ldots+\frac{k_n^{\,2}}{p_w}. \qquad (116)$$

V. Подобным же образом для функции общего вида

$$Y=f(X,\ Z,\ldots\ldots W)$$

найдем

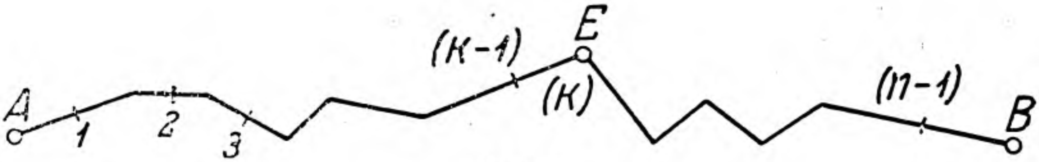
$$\frac{1}{p_y}=\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_0}\right)^2}{p_x}+\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial z_0}\right)^2}{p_z}+\ldots\ldots+\frac{\left(\frac{\partial f}{\partial w_0}\right)^2}{p_w}. \qquad (117)$$

ГЛАВА IV.

Применение теории ошибок к обработке результатов геодезических измерений.

§ 19. Уравновешивание одиночного нивелирного хода.

Пусть имеем нивелирный ход в n станций (черт. 1) между точками A и B, отметки которых H_a и H_e точно известны. Определим отметку H_e точки E, отстоящей от точки A на k станций. Отметку точки E можно определить дважды: от точки A и от точки B. Получим



Черт. 1.

$$H'_e = H_a + \sum_1^k h \tag{118}$$

и

$$H''_e = H_e - \sum_k^n h. \tag{119}$$

Значения H'_e и H''_e неравноточны.

На основании формулы (82) мы можем написать

и

$$\left. \begin{aligned} m'_e &= m_h \cdot \sqrt{k} \\ m''_e &= m_h \cdot \sqrt{n-k} \end{aligned} \right\} \tag{120}$$

С другой стороны, по определению веса

$$m'_e = \frac{\mu}{\sqrt{p'_e}} \quad \text{и} \quad m''_e = \frac{\mu}{\sqrt{p''_e}}. \tag{121}$$

Сравнение формул (120) и (121) дает

$$p'_e = \frac{\mu^2}{m_h^2 \cdot k}$$

и

$$p''_e = \frac{\mu^2}{m_h^2 (n-k)}.$$

Принимая $\mu = m_h$, т. е. принимая за единицу веса точность измерения разности уровней на одной станции, будем иметь

$$p'_e = \frac{1}{k}, \quad p''_e = \frac{1}{n-k}. \qquad (122)$$

Имея теперь два значения H'_e и H''_e отметки точки E и их веса, мы можем определить окончательное значение H_e отметки точки E по формуле общей арифметической средины. Получим

$$H_e = \frac{H'_e \cdot p'_e + H''_e \cdot p''_e}{p'_e + p''_e}. \qquad (123)$$

Для упрощения этой формулы возьмем по (118) и (119) разность H'_e и H''_e. Будем иметь

$$H'_e - H''_e = H_a - H_e + \sum_1^n h = \sum_1^n h - (H_e - H_a).$$

Но правая часть этого равенства есть невязка данного нивелирного хода. Обозначив ее через f_h, имеем

$$H'_e - H''_e = f_h, \qquad (124)$$

откуда

$$H''_e = H'_e - f_h.$$

Подставляя это значение в формулу (123), будем иметь

$$H_e = \frac{H'_e \cdot p'_e + (H'_e - f_h) \cdot p''_e}{p'_e + p''_e},$$

откуда, после простых преобразований, найдем

$$H_e = H'_e - f_h \cdot \frac{p''_e}{p'_e + p''_e}.$$

Подстановка сюда значений весов по (122), после преобразований, дает нам окончательно

$$H_e = H'_e - \frac{f_h}{n} \cdot k. \qquad (125)$$

Полученная формула, будучи справедливой в отношении отметки любого пикета нивелирного хода, дает возможность сделать такое заключение: для получения вероятнейших значений отметок пикетов нивелирного хода с одинаково точно пронивелированными станциями, достаточно невязку этого хода распределить с обратным знаком поровну на все станции и, начиная от одного из концов хода, вычислить отметки пикетов по исправленным превышениям. Таким образом, обычно применяемый для одиночного хода способ уравновешивания является и наиболее рациональным в данном случае.

Определим теперь точность достигаемых результатов, для чего определим вес p_e окончательного значения H_e отметки точки E. На основании формулы (98) можем написать

$$p_e = p'_e + p''_e,$$

или по (122)

$$v_e = \frac{1}{k} + \frac{1}{n-k} = \frac{n}{k(n-k)}. \tag{126}$$

Эта формула показывает, что вычисленные окончательные отметки пикетов нельзя считать одинаково надежными. Наименее надежный результат будет тот, для которого вес p_e будет наименьший. При данном числе n вес p_e изменяется с изменением числа k.

Minimum p_e соответствует *maximum*'у выражения

$$v = k \cdot (n - k).$$

Поступая по правилам высшего анализа для отыскания значения k, обращающего функцию y в *maximum*, мы найдем

$$\frac{dy}{dx} = n - k - k = 0,$$

откуда

$$k = \frac{n}{2}. \tag{126a}$$

Следовательно, наиболее слабым местом уравновешенного нивелирного хода является его средина.

Вес отметки средней точки нивелирного хода будет после уравновешивания равен, на основании формул (126) и (126а), — $\frac{4}{n}$.

Далее, мы знаем, что

$$m_e = \frac{\mu}{\sqrt{p_e}} = \frac{m_k}{\sqrt{p_e}}. \tag{127}$$

Для средней точки нивелирного хода

$$m_e = \frac{m_k}{2} \sqrt{n}. \tag{127a}$$

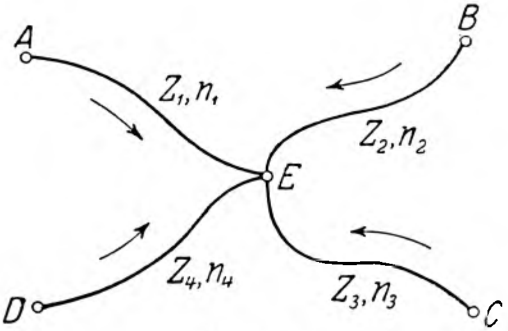
На основании формулы (127а) можно рассчитать, какое наибольшее число станций в нивелирном ходе можно допустить, чтобы отметки пикетов были ошибочны на величину не свыше известного предела.

В случае сомкнутого нивелирного хода, как представляющего частный случай разомкнутого хода, выше приведенный способ уравновешивания целиком имеет место.

В тех случаях, когда каждая станция пронивелирована дважды в порядке прямого и обратного хода или двумя нивелирами, нужно из обоих определений на каждой станции взять среднее арифметическое.

§ 20. Уравновешивание сети нивелирных ходов, опирающихся на марки и репера.

При уравновешивании сети нивелирных ходов, опирающихся на марки и репера, можно применить так называемый метод *узловых* точек.



Черт. 2.

I. Пусть из точек *A*, *B*, *C* и *D*, отметки которых известны (черт. 2), проложены нивелирные ходы в точку *E*, которая и является в данном случае *узловой* точкой. Требуется уравновесить полученную нивелирную сеть. Для этого прежде всего мы определим по имеющимся данным вероятнейшее значение H_e отметки точки *E*. Для отметки точки *E* мы можем по четырем ходам вычислить четыре самостоятельных значения H'_e, H''_e, H'''_e и H^{IV}_e. Веса этих значений по формулам (122) будут соответственно

$$p_1 = \frac{1}{n_1};\ p_2 = \frac{1}{n_2};\ p_3 = \frac{1}{n_3};\ p_4 = \frac{1}{n_4}.$$

Применяя формулу общей арифметической средины, будем иметь

$$H_e = \frac{H'_e \cdot p_1 + H''_e \cdot p_2 + H'''_e \cdot p_3 + H^{IV}_e \cdot p_4}{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}. \qquad (128)$$

Теперь составив разности $H'_e - H_e$, $H''_e - H_e$, $H'''_e - H_e$ и $H^{IV}_e - H_e$, мы получим невязки нивелирных ходов Z_1, Z_2, Z_3 и Z_4, которые и распределяются в каждом ходе общим порядком по правилам одиночного нивелирного хода.

II. *Случай двух узловых точек.* Пусть требуется уравновесить нивелирную сеть, изображенную на чертеже 3. Определим сначала, по предыдущему, значения H_1 и H_2 отметки точки C по ходам Z_1 и Z_2. Веса этих значений будут $p_1=\frac{1}{n_1}$ и $p_2=\frac{1}{n_2}.$ Вероятнейшее значение отметки точки C из этих двух ходов, которое мы обозначим через $H_{1,2}$, будет

$$H_{1,2}=\frac{H_1\cdot p_1+H_2\cdot p_2}{p_1+p_2}. \tag{129}$$

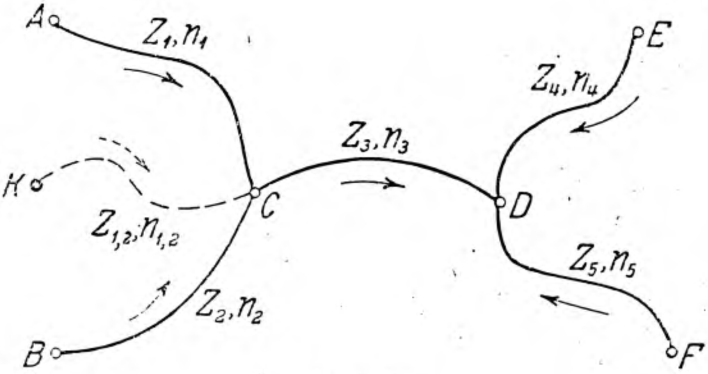
Вес вычисленного значения $H_{1,2}$, который мы обозначим через $p_{1,2}$, вычислится по формуле

$$p_{1,2}=p_1+p_2. \tag{130}$$

Так как по формулам (122) вес и число станций — величины взаимно обратные, то мы можем написать, что

$$p_{1,2}=\frac{1}{n_{1,2}}. \tag{131}$$

где $n_{1,2}$ выражает число станций одиночного нивелирного хода, дающего отметку конечной точки с весом $p_{1,2}$.



Черт. 3.

Обратно

$$n_{1,2}=\frac{1}{p_{1,2}}. \tag{132}$$

Таким образом, если бы вместо двух ходов Z_1 и Z_2 был проложен один нивелирный ход KC с числом станций $n_{1,2}$, то отметка точки C по этому ходу была бы вычислена с таким же весом $p_{1,2}$, а значит и с такой же точностью, как и по двум ходам Z_1 и Z_2 вместе.

Поэтому воображаемый ход KC можно назвать эквивалентным ходам Z_1 и Z_2. Мы этот ход будем обозначать через $Z_{1,2}$.

Заменяя ходы Z_1 и Z_2 эквивалентным ходом $Z_{1,2}$, мы сведем нашу задачу к предыдущему случаю увязывания нивелирной сети с одной узловой точкой D. Поступая по вышеизложенному, вычисляем отметку точки D трижды: по ходам Z_4, Z_5 и $(Z_{1,2}+Z_3)$. Получим значения H_4, H_5 и $H_{1,2,3}$. Вычисление значения $H_{1,2,3}$ фактически производится прибавлением к отметке $H_{1,2}$ $H_{1,2}$ точки C суммы превышений хода Z_3. Веса вычисленных значений отметок будут соответственно

$$p_4=\frac{1}{n_4},\quad p_5=\frac{1}{n_5} \text{ и } p_{1,2,3}=\frac{1}{n_{1,2}+n_3}.$$

На основании этих данных можно вычислить окончательное значение отметки точки D, а именно:

$$H_D=\frac{H_4p_4+H_5p_5+H_{1,2,3}\,p_{1,2,3}}{p_4+p_5+p_{1,2,3}}. \tag{133}$$

Разности H_4-H_D, H_5-H_D и $H_{1,2,3}-H_D$ выразят невязки нивелирных ходов Z_4, Z_5 и $(Z_{1,2}+Z_3)$.

Увязывание ходов Z_4 и Z_5 теперь не представит затруднений Что касается хода $Z_{1,2}+Z_3$, то величина

$$-\frac{H_{1,2,3}-H_D}{n_{1,2}+n_3}=a \tag{134}$$

выразит поправку на одну станцию этого хода. Вводя эту поправку в каждую станцию хода Z_3, мы тем самым получим окончательные значения превышений по станциям этого хода.

Для получения окончательного значения H_c точки C производим вычисления

$$H_c=H_{1,2}+a\cdot n_{1,2}. \tag{135}$$

Теперь остается уравновесить нивелирные ходы Z_1 и Z_2, для чего вычисляем невязки H_1-H_c и H_2-H_c каждого из этих ходов и распределяем их обычным порядком.

Указанный метод можно применить и в том случае, когда узловых точек в нивелирной сети более двух.

§ 21. Уравновешивание сети сомкнутых нивелирных ходов.

I. Пусть имеем два смежных сомкнутых нивелирных полигона Q и R (черт. 4), имеющих общую часть между пикетами A и B. Примем пикет A за начальный и по абсолютной или условной его отметке вычислим отметку пикета B по трем ходам Z_1, Z_2 и Z_3. Получим значения H_1, H_2 и H_3 с весами, соответственно равными

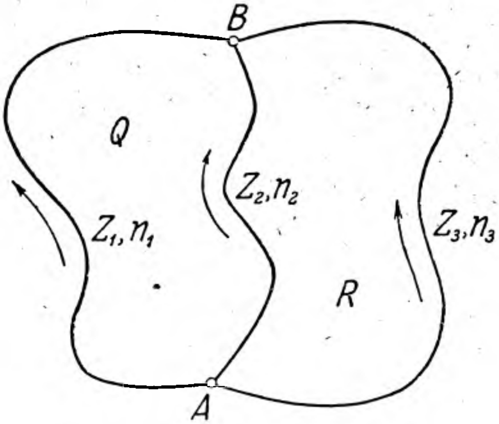
$$p_1=\frac{1}{n_1},\quad p_2=\frac{1}{n_2},\quad p_3=\frac{1}{n_3}.$$

По формуле общей арифметической средины получим окончательное значение отметки точки B

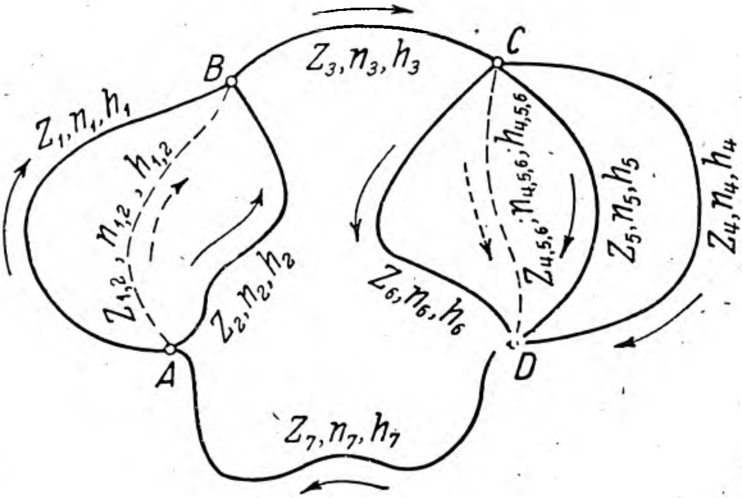
$$H_b=\frac{H_1p_1+H_2p_2+H_3p_3}{p_1+p_2+p_3}.$$

Остается взять разности $H_1 - H_b$, $H_2 - H_b$ и $H_3 - H_b$, которые суть невязки в ходах Z_1, Z_2 и Z_3, и распределить эти невязки в каждом ходе отдельно.

II. Пусть дана сеть полигонов с четырьмя узловыми точками A, B, C и D (черт. 5). Уравновешивание такой сети можно свести к уравновешиванию одиночного сомкнутого хода. Обозначим направление отдельных ходов Z_1, Z_2, . . Z_7 между узловыми точками стрелками, разности высот начальной и конечной точек этих ходов пусть будут соответственно h_1, h_2 . . . h_7, число станций — n_1, n_2 . . . n_7.



Черт. 4.



Черт. 5.

По двум ходам Z_1 и Z_2 мы можем вычислить вероятнейшее значение $h_{1,2}$ разности высот точек A и B

$$h_{1,2} = \frac{h_1 \cdot p_1 + h_2 \cdot p_2}{p_1 + p_2},$$

где

$$p_1 = \frac{1}{n_1} \text{ и } p_2 = \frac{1}{n_2}.$$

Вес значения $h_{1,2}$ будет

$$p_{1,2} = p_1 + p_2.$$

Вычисляя отсюда $n_{1,2}$ по формуле (132)

$$n_{1,2} = \frac{1}{p_{1,2}},$$

мы можем вообразить между точками A и B нивелирный ход $Z_{1,2}$ с числом станций $n_{1,2}$ и этот один ход по точности результатов будет равносилен двум ходам Z_1 и Z_2 вместе. Поэтому в дальнейшем мы и заменим временно ходы Z_1 и Z_2 одним ходом $Z_{1,2}$, с числом станций $n_{1,2}$ и с разностью уровней $h_{1,2}$.

Точно также по трем нивелирным ходам Z_4, Z_5, Z_6 мы можем вычислить вероятнейшее значение $h_{4,5,6}$ разности уровней точек C и D:

$$h_{4,5,6} = \frac{h_4 \cdot p_4 + h_5 \cdot p_5 + h_6 \cdot p_6}{p_4 + p_5 + p_6},$$

где

$$p_4 = \frac{1}{n_4}, \quad p_5 = \frac{1}{n_5}, \quad p_6 = \frac{1}{n_6}.$$

Вес значения $h_{4,5,6}$ будет

$$p_{4,5,6} = p_4 + p_5 + p_6.$$

Отсюда, подобно предыдущему,

$$n_{4,5,6} = \frac{1}{p_{4,5,6}}.$$

$n_{4,5,6}$, выразит число станций хода $Z_{4,5,6}$ между точками C и D, который по точности результатов равносилен трем ходам Z_4, Z_5 и Z_6 вместе, и может их в дальнейшем заменить при уравновешивании.

Таким образом, мы свели дело к уравновешиванию сомкнутого одиночного полигона $ABCD$, состоящего из четырех ходов $Z_{1,2}$, Z_3, $Z_{4,5,6}$ и Z_7.

Будем иметь

$$h_{1,2} + h_3 + h_{4,5,6} + h_7 = f_h,$$

где f_h есть невязка нашего полигона.

Число станций n в нем будет

$$n_{1,2} + n_3 + n_{4,5,6} + n_7 = n,$$

а $-\frac{f_h}{n}$, которую мы обозначим через a,

$$a = -\frac{f_h}{n}$$

будет поправка на одну станцию нашего полигона.

Таким образом, ходы Z_3 и Z_7 будут увязаны, а для ходов $Z_{1,2}$ и $Z_{4,5,6}$ мы вычислим окончательные значения разностей уровней точек A и B и C и D, а именно:

$$h_{ab} = h_{1,2} + a \cdot n_{1,2}$$

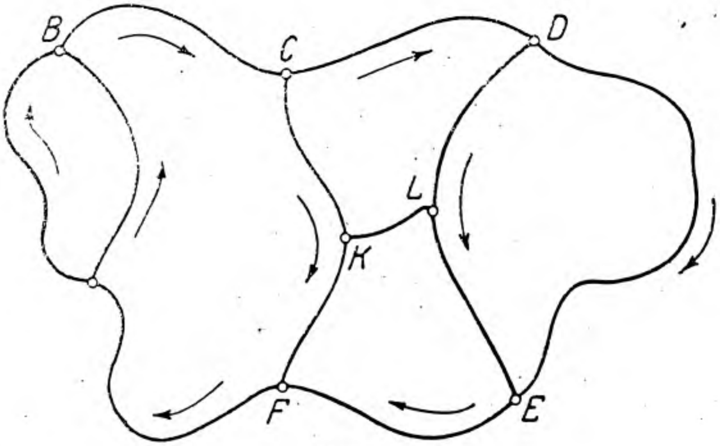
$$h_{cd} = h_{4,5,6} + a \cdot n_{4,5,6}.$$

Теперь разности $h_1 - h_{ab}$ и $h_2 - h_{ab}$ будут невязки нивелирных ходов Z_1 и Z_2, а разности $h_4 - h_{cd}$, $h_5 - h_{cd}$ и $h_6 - h_{cd}$ выразят невязки ходов Z_4, Z_5 и Z_6.

Распределением этих невязок по отдельным ходам заканчивается задача уравновешивания нивелирной сети.

Вычисление отметок пикетов уже не представит затруднений.

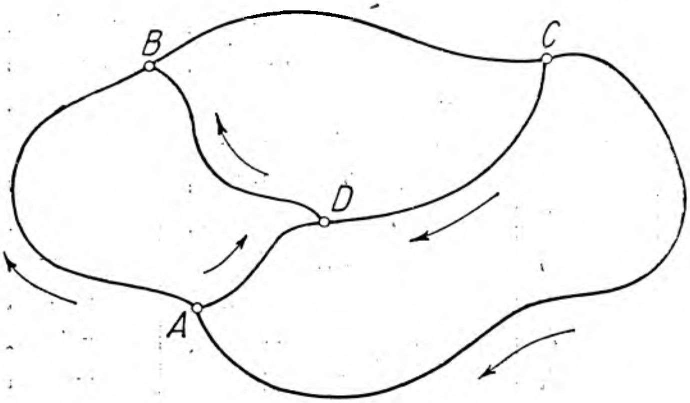
III. Указанный метод уравновешивания применим и при большем числе полигонов. В том случае, когда нивелирная сеть оказывается очень сложной, некоторые связи можно временно опустить с тем, чтобы эти опущенные связи принять в расчет при увязывании того района, в котором они находятся. Например, при уравновешивании нивелирной сети, изображенной на черт. 6-м, можно временно опустить связь KL, но затем, когда отметки точек C, D, E и F будут получены, группу полигонов CK, DL, KL и LE следует увязать вместе, приемом, указанным в § 20 для случая двух узловых точек.



Черт. 6.

Равным образом, при уравновешивании нивелирной сети, представленной на черт. 7, где ход AD по сравнении с ходами DB и

DC довольно мал, можно принять, что внутренние ходы идут: один из точки *A* в точку *B*, а другой из точки *C* в точку *A*, при чем на участке *AD* они идут рядом. Но после нахождения отметок точек *A*, *B* и *C* нужно отметку точки *D* определить по трем нивелирным ходам *AD*, *BD* и *CD* путем, указанным в п. I § 20. Можно поступить и иначе. Напр., в случае черт. 6 можно в четыреугольнике *EFKL* распределить невязку в сумме превышений этого полигона по отдельным ходам по правилам одиночного хода и после этого выпустить ход *EF*. Тогда



Черт. 7.

задача сведется к уравновешиванию сети нивелирных полигонов с диагональными ходами *AB*, *KC* *LD*, что легко сделать по правилу эквивалентной замены. Когда отметки точек *E* и *F* после уравновешивания будут выписаны, ход *EF* увязывается между ними окончательно как одиночный.

Точно таким же путем можно увязать и нивелирную сеть чер. 7. Выпускать следует наиболее длинный ход. На черт. 7 таким будет ход *CA*.

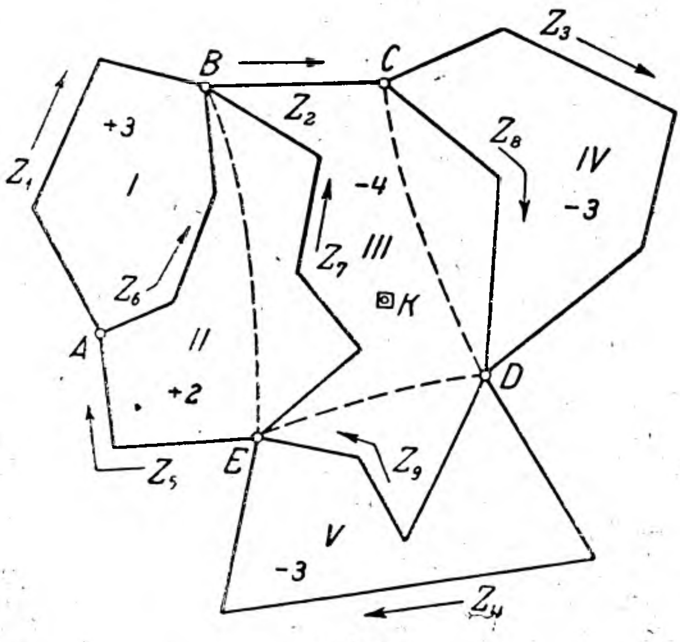
§ 22. Пример на уравновешивание нивелирной сети.

Требуется уравновесить сеть из пяти нивелирных полигонов (черт. 8), разбитых узловыми точками на 9 отдельных ходов. Направления внешних ходов располагаются по часовой стрелке. Направления внутренних ходов также располагаются по часовой стрелке относительно заранее взятой внутренней точки, например, в нашем случае точки *K*. (См. черт. на стр. 50).

Разности уровней начала и конца каждого хода и число станций в нем даны во 2-ой и 3-ей графах нижеприведенной схемы, где записаны и результаты уравновешивания. (См. табл. на стр. 50).

Вычисления начинаются с подсчета и выписывания на схематическом чертеже по каждому полигону невязки превышений. Эти невязки должны быть сверены с предельной, дабы убедиться в том, что в измерениях нет грубых ошибок.

Название хода	Превышения h	Число станций n	Вес p	Поправка ε	Исправленные превышения $(h+\varepsilon)$
Z_1	$+3.546$	7	0.14	-0.002_1	$+3.543_9$
Z_6	$+3.543$	5	0.20	$+0.000_9$	$+3.543_9$
Z_B	$+3.544_2$	2.9	0.34	-0.000_3	$+3.543_9$
Z_5	$+4.218$	4	—	-0.000_3	$+4.217_7$
$Z_{AB}+Z_5$	$+7.762_2$	6.9	0.15	-0.000_6	$+7.761_6$
Z_7	$+7.759$	5	0.20	$+0.002_6$	$+7.761_6$
Z_{EB}	$+7.760_4$	2.9	0.35	—	—
Z_3	-5.090	10	0.10	$+0.003_3$	-5.086_7
Z_8	-5.087	7	0.14	$+0.000_3$	-5.086_7
Z_{CD}	-5.088_3	4.2	0.24	—	—
Z_4	-0.390	7	0.14	$+0.001_9$	-0.387_1
Z_9	-0.387	4	0.25	-0.000_1	-0.387_1
Z_{DE}	-0.388_1	2.6	0.39	$+0.001$	$-0{,}387_1$
Z_{EB}	$+7.760_4$	2.9	—	$+0.001_2$	$+7.761_6$
Z_2	-2.289	3	—	$+0.001_2$	-2.287_8
Z_{CD}	-5.088_3	4.2	—	$+0.001_6$	-5.086_7
	-0.005	12.7			



Черт. 8.

Затем производится последовательная замена разветвлений по формуле общей арифметической средины с подсчетом весов и соответствующего числа станций, а именно: Z_1 и Z_6 заменяется через Z_{AB}

$(Z_5 + Z_{AB})$ и Z_7 заменяется через Z_{EB}
Z_3 „ Z_9 „ „ Z_{CD}
Z_4 „ Z_9 „ „ Z_{DE}.

Получается сомкнутый полигон *BCDE* с числом станций 12.7 и невязкой—0.005 метра.

Распределение этой невязки дает окончательные значения превышений Z_2, Z_{CD}, Z_{DE} и Z_{EB}.

Пользуясь этими результатами, в дальнейшем производят определение поправок по отдельным нивелирным ходам.

§ 23. Уравновешивание тахеометрической сети.

Уравновешивание превышений, полученных тахеометрическим путем (при помощи наклонного луча зрения), может быть произведено тем же способом, что и уравновешивание нивелирных сетей. При этом лишь нужно установить, что́ принимать за вес того или иного тахеометрического хода.

Для этого рассмотрим ближе формулу (85) средней квадратической ошибки отдельного превышения одной точки над другой, соседней, вычисляемого по формуле $h = l\,\mathrm{tg}\alpha$.

Имеем

$$m_h^2 = \mathrm{tg}^2\alpha\ m_l^2 + \frac{l^2}{\cos^2\alpha}\ m_\alpha^2 .\ \sin^2 1'.$$

Предположим, что работа производится на местности равнинной. Тогда, при визировании с одной станции на другую, угол наклонения α можно считать величиной небольшой (от 0° до 3°). В таком случае, $\cos\alpha$ можно принять равным 1, а $\mathrm{tg}\alpha$ заменить через $\frac{\alpha^{(\circ)}}{57,3}$.

Будем иметь

$$m_h^2 = \left(\frac{\alpha}{57 \cdot 3}\right)^2 m_l^2 + l^2\, m_\alpha^2\ .\ \sin^2 1'. \qquad (136)$$

Если длина линии измеряется при тахеометрической съемке лентой, т. е. с точностью около $^1/_{1000}$—$^1/_{2000}$, а угол наклонения отсчитывается с округлением до 1′, то в правой части формулы (136) первый член будет мал, по сравнении со вторым. В таких случаях можно считать ошибку m_h пропорциональной расстоянию l.

Положим, что в этом случае

$$m_h = \lambda \cdot l. \qquad (137)$$

Вес, p превышения h определяется по формуле

$$v_h = \frac{\mu^2}{m_h^2}.$$

Значит, можно написать, что

$$v_h = \frac{\mu^2}{\lambda^2\ l^2}.$$

Обозначив $\frac{\mu^2}{\lambda^2}$ через k, будем иметь

$$p_h = \frac{k}{l^2}. \qquad (138)$$

Обычно, k делается равным 1, 10, 100 и т. д.

Положим $k=1$, получим

$$v_h = \frac{1}{l^2}. \qquad (139)$$

Итак, в данном случае вес превышения одной точки над другой есть величина, обратно пропорциональная квадрату расстояния между этими точками.

Поэтому, если имеется одиночный тахеометрический ход, расположенный между точками с известными отметками и состоящий из n звеньев с превышениями h_1, h_2, ... h_n, то невязка этого хода должна распределяться по отдельным превышениям пропорционально квадратам длин этих звеньев.

Так как разность высот начальной и конечной точки тахеометрического хода определяется как $\sum\limits_1^n h$, то вес этой разности высот определяется по формуле (114)

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_{h_1}} + \frac{1}{p_{h_2}} + \ldots + \frac{1}{p_{h_n}}, \qquad (140)$$

а на основании (139)

$$\frac{1}{p} = l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2,$$

откуда

$$v = \frac{1}{l_1^2 + l_2^2 + \ldots + l_n^2} = \frac{1}{\sum\limits_1^n l^2}. \qquad (141)$$

Вычисляя по этой формуле веса отдельных тахеометрических ходов, мы можем производить уравновешивание тахеометрической сети порядком, описанным в §§ 19 — 22.

Если расстояние l измеряется дальномером, то полагая, что в общем ошибка при измерении расстояний дальномером пропорциональна этому расстоянию, т. е.

$$m_e = \mu l,$$

мы будем иметь для формулы (136)

$$m_h^2 = l^2 \left[\left(\frac{a}{57.3} \right)^2 \mu^2 + m_a^2 \cdot \sin^2 1' \right]. \qquad (142)$$

Значит, и в данном случае можно считать, что

$$p_h = \frac{1}{l^2},$$

и распределение невязок можно производить только что указанным способом.

Если расстояние l берется с плана, как это имеет место в мензульной топографической съемке при определении альтитуд пунктов геометрической сети, то в таком случае ошибка m_e не зависит от измеряемого расстояния, а потому вопрос о весе сильно осложняется. Для упрощения дела можно считать, что

$$p_h = \frac{1}{l}. \qquad (143)$$

Вышеприведенные приемы определения весов превышений распространяют и на случай гористой местности.

§ 24. Уравновешивание полигонов угломерной съемки.

При измерении всех сторон и углов полигона получается *три* избыточных данных, которые влекут за собой необходимость выполнения *трех* условий

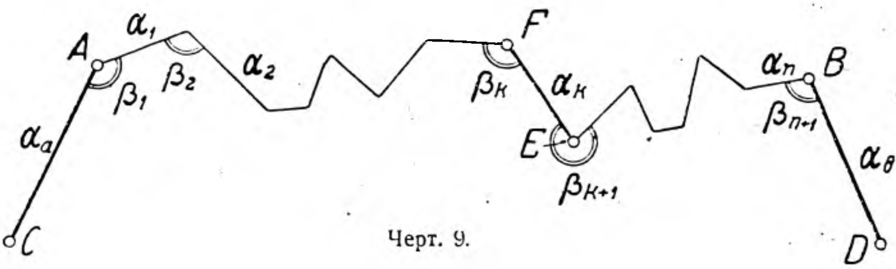
$$\left.\begin{aligned} &\sum_1^n \beta - 180^\circ (n-2) = 0 \\ &\sum_1^n \Delta x = 0 \\ &\sum_1^n \Delta y = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (144)$$

для сомкнутого полигона.

Для разомкнутого полигона эти условия принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{1}^{n+1} \beta + a_b - a_a 180^\circ (n+1) = 0 \\ &\sum_{1}^{n} \Delta x - (x_b - x_a) = 0 \\ &\sum_{1}^{n} \Delta y - (y_b - y_a) = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (145)$$

Существует, как мы увидим в дальнейшем, прием, позволяющий найти вероятнейшие значения углов и длин сторон, удовлетворяющие всем вышеприведенных условиям. Но применение этого приема к данному случаю влечет слишком длинные, утомительные вычисления, не соответствующие, по своей сложности и затрате времени на них, имеющемуся для обработки материалу. Поэтому, при уравновешивании угломерных полигонов, принято отделять уравновешивание углов от уравновешивания приращений координат, чем задача в значительной степени упрощается.



Черт. 9.

Пусть между точками A и B (черт. 9) проложен полигон с n сторонами, углы β_1, β_2, ... β_{n+1} измерены непосредственно, азимуты a_a и a_b сторон CA и BD даны.

Требуется определить вероятнейшее значение a_k линии FE, k-ой по счету от начала A.

Мы можем найти два значения азимута линии FE, а именно: от линии CA

$$a'_k = a_a + k \cdot 180^\circ - \sum_{1}^{k} \beta, \qquad (146)$$

и от линии DB

$$a''_k = a_b - (n + 1 - k) 180^\circ + \sum_{k+1}^{n+1} \beta. \qquad (147)$$

Азимут есть функция суммы измеренных углов. Если считать, что в нашем полигоне нет коротких линий и что, вообще, условия измерения углов были одинаковы, а, значит, самые измерения равноточны, то, обозначая среднюю квадратическую ошибку измерения одного угла через m, а среднюю квадратичечкую ошибку азимута линии через m_a, будем иметь

$$m_{\alpha' k} = m \cdot \sqrt{k} \qquad (148)$$

и

$$m_{\alpha'' k} = m \cdot \sqrt{n+1-k}. \qquad (149)$$

С другой стороны, по определению веса,

$$m_{\alpha' k} = \frac{\mu}{\sqrt{p_1}}$$

где p_1 есть вес азимута линии FE.

Отсюда

$$m \cdot \sqrt{k} = \frac{\mu}{\sqrt{p_1}},$$

что, по преобразовании, дает

$$p_1 = \frac{\mu^2}{m^2 \cdot k}. \qquad (150)$$

Если принять $\mu = m$, т. е. если принять за единицу веса измерение одного угла, то

$$p_1 = \frac{1}{k}. \qquad (151)$$

Точно также найдем, что

$$p_2 = \frac{1}{n+1-k}. \qquad (152)$$

Мы видим, что в данном случае имеется полная аналогия со случаем уравновешивания одиночного нивелирного хода, разобранным в § 19. Поэтому очевидно, что в результате мы придем к аналогическому выводу, выражаемому формулой

$$\alpha_k = \alpha'_k + \frac{f_\beta}{n+1} k. \qquad (153)$$

Здесь f_β есть невязка в углах хода.

Формума (153) дает возможность сделать такое заключение: для получения вероятнейших значений азимутов сторон полигона по измеренным углам его, достаточно невязку в углах этого полигона распределить с обратным знаком поровну на все углы и вычислить азимуты сторон полигона по этим исправленным углам и по азимуту начальной и конечной стороны полигона.

Азимут линии FE после уравновешивания будет обладать весом

$$p_k = p_1 + p_2 = \frac{n+1}{k(n+1-k)}.$$

Наиболее слабым местом после такого уравновешивания будет средина полигона.

При

$$k = \frac{n+1}{2}$$

будем иметь

$$p_k = \frac{4}{n+1}.$$

Сделанный вывод справедлив и для сомкнутого полигона.

Предположим теперь, что в полигоне (черт. 9) измерены длины, сторон $l_1, l_2, \ldots l_n$, даны координаты точек A (X_a, Y_a) и B (X_b, Y_b), и вычислены приращения координат по всему ходу. Требуется определить вероятнейшее значение координат точки E (X_e, Y_e).

Для координат точки E мы можем вычислить два значения от точки A

$$\left.\begin{aligned} X'_e &= X_a + \sum_1^k \Delta x \\ Y'_e &= Y_a + \sum_1^k \Delta y \end{aligned}\right\} \qquad (154)$$

и от точки B

$$\left.\begin{aligned} X''_e &= X_b - \sum_{k+1}^n \Delta x \\ Y''_e &= Y_b - \sum_{k+1}^n \Delta y \end{aligned}\right\} \qquad (155)$$

Вычисление весов этих значений является делом весьма сложным. Поэтому здесь, для простоты расчетов, обычно полагают, что вес вычисленных координат точки полигона обратно пропорционален длине хода от начальной до определяемой точки. В основе этого положения лежит соображение здравого смысла, что при прочих равных условиях, чем длиннее полигон, тем менее надежно определение положения конечной его точки.

Обозначая вес значений координат X'_e и Y'_e через r_1, а вес значений координат X''_e и Y'_e через r_2, обозначая далее $\sum\limits_1^k l$ через L_1,

$\sum\limits_{k+1}^{n} l$ через L_2 и $\sum\limits_{1}^{n} l$ через L, будем иметь

и
$$\left.\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{L_1} \\ r_2 &= \frac{1}{L_2}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (156)$$

Конечно, подобное определение веса координат носит элементы произвольности, кроме того следует отметить, что значения координат точки E, вычисляемые по формулам (154) и (155), не совершенно независимы друг от друга, так как они получены по уравновешенным азимутам. Тем не менее, для практических целей, как показывает опыт, этого можно не учитывать при увязывании угломерных полигонов, измеренных с обычной точностью.

Вычисляя вероятнейшее значение координат точки E, получим

и
$$\left.\begin{aligned} X_e &= \frac{X'_e \cdot r_1 + X''_e \cdot r_2}{r_1 + r_2}\,. \\ Y_e &= \frac{Y'_e r_1 + Y''_e r_2}{r_1 + r_2} \end{aligned}\right\} \qquad (157)$$

Обозначая невязки в приращениях абсцисс и ординат через f_x и f , мы можем написать, что

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^n \Delta x &= X_e - X_a + f_x \\ \sum_1^n \Delta y &= Y_e - Y_a + f_y \end{aligned}\right\} \qquad (158)$$

С другой стороны, из равенств (154) и (155) мы вычитанием получим

$$X''_e - X'_e = X_b - X_a - \sum_1^n \Delta x$$

$$Y''_e - Y'_e = Y_b - Y_a - \sum_1^n \Delta y,$$

откуда, принимая во внимание (158),

$$X''_e = X'_e - f_x$$
$$Y''_e = Y'_e - f\,.$$

Подставляя эти значения в равенство (157), будем иметь

$$X_e = \frac{X'_e r_1 + (X'_e - f_x) \cdot r_2}{r_1 + r_3}$$

$$Y_e = \frac{Y'_e r_1 + (Y'_e - f_y) \cdot r_2}{r_1 + r_2}$$

Откуда, по преобразовании,

$$X_e = X'_e - \frac{r_2}{r_1 + r_2} f_x$$

и

$$Y_e = Y'_e - \frac{r_2}{r_1 + r_2} f_y .$$

Подстановка значений весов по формулам (156) дает

$$\left.\begin{aligned} X_e &= X'_e - \frac{f_x}{L} \cdot L_1 \\ Y_e &= Y'_e - \frac{f_y}{L} \cdot L_1 \end{aligned}\right\} \qquad (159)$$

На основании этих формул мы можем сделать вывод, что для уравновешивания приращений координат полигона достаточно распределить невязки f_x и f_y, взятые с обратными знаками, между соответствующими приращениями абсцисс и ординат пропорционально длинам линий.

Если линии были измерены на местности разного качества в отношении условий измерения, то для уравновешивания нужно эти длины предварительно привести к местности одного класса.

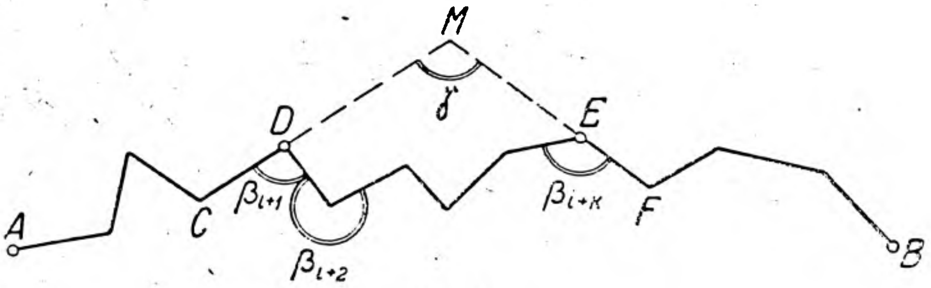
Приведенное правило уравновешивания приращений координат справедливо, конечно, и для сомкнутого полигона.

§ 25. Уравновешивания сети угломерных полигонов.

Из предыдущего параграфа не трудно видеть, что если сеть угломерных полигонов проложена между пунктами с точно известными координатами и опирается в каждом из этих пунктов на линии с точно известными азимутами, то уравновешивание углов и приращений координат такой сети можно произвести методом узловых точек совершенно тем же порядком, какой изложен в § 20 в отношении уравновешивания сети нивелирных ходов, полагая при ураповешивании углов вес азимута линии обратно пропорциональным числу углов соответствующего хода, а вес координат точки обратно пропорциональным длине хода.

При уравновешивании сети сомкнутых угломерных полигонов можно пользоваться изложенным в § 21 методом эквивалентной замены разветвлений, при чем при уравновешивании приращений абсцисс или ординат, таким эквивалентом может служить разность абсцисс или ординат узловых точек, между которыми проложены заменяемые ходы. Что касается уравновешивания углов, то здесь для отыскания эквивалента можно поступить следующим образом.

Пусть имеем угломерный полигон *ACDEFB* (черт. 10).



Черт. 10.

Установим связь между углами β_{i+1}, β_{i+2}, ... β_{i+k} части хода *CD*. . *EF* и углом γ между крайними сторонами *CD* и *EF* этой части.

Мы знаем, что

$$(EF) = (CD) + k \cdot 180^\circ - \sum_{i+1}^{i+k} \beta.$$

С другой стороны

$$(EF) = (CD) + 180^\circ - \gamma.$$

Сравнение правых частей этих равенств дает

$$(CD) + k \cdot 180^\circ - \sum_{i+1}^{i+k} \beta = (CD) + 180^\circ - \gamma,$$

откуда

$$\gamma = \sum_{i+1}^{i+k} \beta - (k-1) \cdot 180^\circ. \qquad (160)$$

Такова связь для правых углов хода. Если даны левые углы хода λ_{i+1}, λ_{i+2}, ... λ_{i+k}, то, зная, что, вообще,

$$\beta = 360^\circ - \lambda,$$

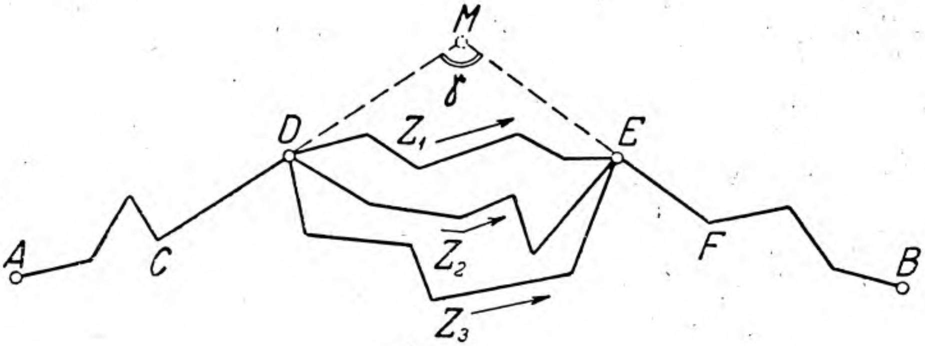
мы, после подстановки и преобразований, найдем

$$\gamma = (k+1) \cdot 180^\circ - \sum_{i+1}^{i+k} \lambda. \qquad (161)$$

Угол γ есть функция суммы k измеренных углов, а потому, считая все непосредственно измеренные углы равноточными и принимая вес измерения одного угла за единицу, мы можем, по аналогии с азимутом, написать по формуле (151)

$$p = \frac{1}{k}. \qquad (162)$$

Предположим теперь, что между точками D и E полигона (черт. 11) имеется разветвление, состоящее, например, из трех отдельных ходов Z_1, Z_2, Z_3 с числом углов соответственно k_1, k_2, k_3.



Черт. 11.

Вычисляя по каждому ходу значение угла γ, мы найдем три значения γ', γ'', и γ''' с весами соответственно

$$p_1 = \frac{1}{k_1}, \quad p_2 = \frac{1}{k_2}, \quad p_3 = \frac{1}{k_3}.$$

Отсюда по формуле общей арифметической средины будем иметь

$$\gamma_{1,2,3} = \frac{\gamma' \cdot p_1 + \gamma'' \cdot p_2 + \gamma''' \cdot p_3}{p_1 + p_2 + p_3}. \qquad (163)$$

Величина $\gamma_{1,2,3}$ и есть эквивалентная замена углов ходов Z_1, Z_2 и Z_3 при уравновешивании углов данного полигона. Вес значения угла $\gamma_{1,2,3}$ определится по формуле (98)

$$p_{1,2,3} = p_1 + p_2 + p_3, \qquad (164)$$

откуда, по определению веса (162),

$$k_{1,2,3} = \frac{1}{p_{1,2,3}}. \qquad (165)$$

Число $k_{1,2,3}$ показывает, что по точности результата угол $\gamma_{1,2,3}$ соответствует точности определения суммы $k_{1,2,3}$ углов.

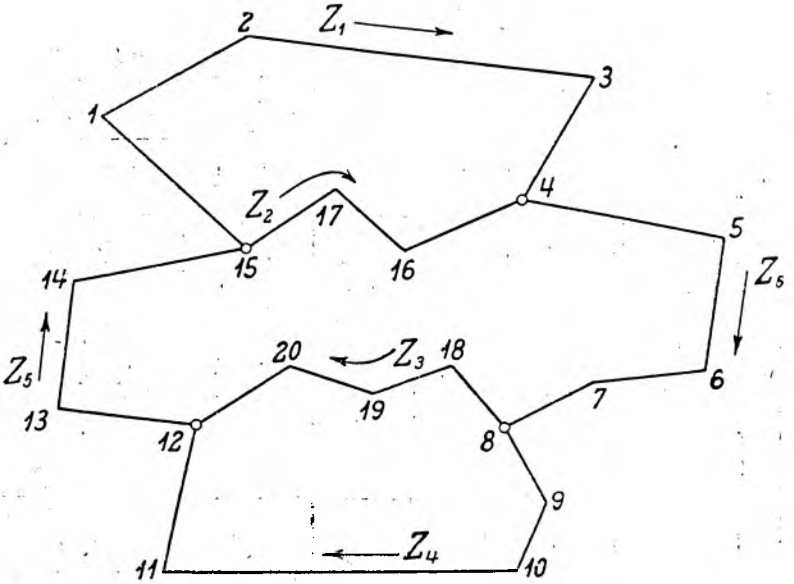
Пользуясь в качестве эквивалента углом γ, можно при уравновешивании углов сети сомкнутых полигонов, постепенной заменой разветвлений соответствующим углом γ свести задачу к уравновешиванию сомкнутого одиночного полигона. Порядок уравновешивания одинаков с порядком, изложенным в §§ 21 и 22 в отношении сети нивелирных ходов.

Для лучшего уяснения вопроса рассмотрим следующий пример на уравновешивание сети угломерных полигонов.

§ 26. Пример на уравновешивание сети сомкнутых угломерных полигонов.

Пусть дан (черт. 12) сомкнутый полигон с двумя диагональными ходами.

Четырьмя узловыми точками полигон, вместе с диагональными ходами, разбивается на шесть отдельных ходов. Каждому из этих ходов нужно придать направление по ходу часовой стрелки, смотря из средней части фигуры. Эти направления указаны на чертеже стрелками. Для уравновешивания углов нужно углы ходов Z_1 и Z_2 заменить вероятнейшим значением $\gamma_{1,2}$ угла между линиями (14—15) и (4—5). Точно также углы ходов Z_3 и Z_4 нужно заменить вероятнейшим значением $\gamma_{3,4}$ угла между линиями (7—8) и (12—13). Тогда углы ходов Z_5 и Z_6 вместе с углами $\gamma_{1,2}$ и $\gamma_{3,4}$ образуют сомкнутый многоугольник. Определив сумму этих всех углов и сравнив ее с теоретической, мы получим невязку в углах этого сомкнутого многоугольника. Полученную невязку распределяем между углами, принимая во внимание веса углов $\gamma_{1,2}$ и $\gamma_{3,4}$. Таким образом, углы ходов Z_5 и Z_6 будут уравновешены, а для углов $\gamma_{1,2}$ и $\gamma_{3,4}$ будут известны их окончательные значения. Окончательное значение угла $\gamma_{1,2}$ дает возможность определить невязки в углах ходов Z_1 и Z_2, а по окончательному значению угла $\gamma_{3,4}$ можно определить невязки в углах Z_3 и Z_4. Уравновешивание углов всех этих ходов уже не представит затруднений. Уравновешивание приращений координат производится в том же порядке.



Черт. 12.

№№ пунктов	Измеренные углы		Поправки углов	Азимуты сторон		Длины линий	Вычисленные		Поправки Δx	Вычисленные		Поправки Δy	Координаты			
	0	1		0	1		±	Δx		±	Δy		±	x	±	y
								Х о д Z_1								
14	Пра	вые	—	40	39.0				+			—				
15	257	24	0.5	323	15.5	212.58	+	170.35	0.01	—	127.17	0.04	—	170.36	+	127.21
1	61	56	0.5	78	20.0	123.35	+	24.94		+	120.80	0.01		0 00		0.00
2	162	23	0.5	95	57.5	190.09	—	19 73		+	189.07	0 04	+	24.94	+	120.79
3	89	10	0.5	186	48.0	182.22	—	180.95		—	21.58	0.04	+	5.21	+	309.82
4	248	59	0.5	117	49.5								—	175.74	+	288.20
5																
	822	52	2;″5			708.24	—	5.39	0.01	+	161.12	0.13				
—	720					s_1=7.1	—	5.38		+	160.99	0.13				
γ_1	= 102	52				r_1=0.14		0.01		+	0.13					
	102	49.5	$p_1=\frac{1}{5}$	=	0.20			$\sqrt{0.01^2+0.13^2}$		=	0.13					
	Нев.	+ 2.5														
	Пред.	3.4						Пред.	0.62							

№№ пунктов	Измеренные углы		Поправки углов	Азимуты сторон		Длины линий	Вычисленные		Поправки Δx	Вычисленные		Поправки Δy	Координаты			
	0	1		0	1		±	Δx		±	Δy		±	x	±	y
								Ход Z_2								
14	Левые		—	40	39.0				+			+				
15	322	10	0.1	182	48.9	57.33	—	57.26	0.02	—	2.82	0.04	—	170.36	+	127.21
17	89	9	0.1	91	57.8	126.51	—	4.34	0.05	+	126.44	0.13	—	227.60	+	124.43
16	121	33	0.1	33	30.7	67.31	+	56 12	0.03	+	37.16	0.04	—	231.89	+	251.00
4	264	19	0.2	117	49.5								—	175.74	+	288.20
5																
	797	11	0.5			251.15	—	5.48	0.10	+	160.78	0.21				
	900					$s_2 = 2.5$	—	5.38		+	160.99					
γ_2	=102	49	$p_2 =$	$\frac{1}{4} =$	0 25	$r_2 = 0.40$	—	0.10		—	0.21					
	—102	49.5						$\sqrt{0.10^2 + 0.21^2}$		=	0.23					
	Нев.	—0.5														
	Пред.	3.0						Пред.	=0.28							

№ № пунктов	Измеренные углы		Поправки углов	Азимуты сторон		Длины линий	Вычисленные		Поправка Δx	Вычисленные		Поправки Δy	Координаты			
	0	1		0	1		±	Δx		±	Δy		±	x	±	y
								Х о д $Z_{з}$								
7	Пра вые		—	208	28.7				+			+				
8	125	28	0.3	263	1.0	70.25	—	8.54	0.01	—	69.73	0.05	—	406.00	+	231.80
18	172	11	0.3	270	50.3	66.13	+	0.95	0.01	—	66.12	0.04	—	414.53	+	162.12
19	199	1	0.3	251	49.6	42.16	—	13.15	0.01	—	40.06	0.02	—	413.57	+	96.04
20	193	21	0.3	238	28.9	51.12	—	26.72	0.01	—	43.57	0.03	—	426.71	+	56.00
12	99	32	0.3	318	57.2								—	453.42	+	12.46
13																
	789	33	1.5			229.66	—	47.46	0.04	—	219.48	0.14				
—	720					$s_{з} = 2.3$	—	47.42		—	219.34					
$f_{з}$	= 69	33	$p_{з} =$	$\frac{1}{5} =$	0.20	$f_{з} = 0.43$	—	0.04		—	0.14					
	— 69	31.5						$\sqrt{0.04^2 + 0.14^2}$	$= 0.15$							
	Нев.	+ 1.5														
	Пред.	3.4						Пред.	0.26							

№№ пунктов	Измеренные углы		Поправки углов	Азимуты сторон		Длины линий	Вычисленные		Поправки Δx	Вычисленные		Поправки Δy	Координаты			
	0	1		0	1		±	Δx		±	Δy		±	x	±	y
								Ход Z_4								
7	Пра	вые	—						+			—				
				208	28.7											
8	197	38	0.1										—	406.00	+	231.80
				190	50.8	79.91	—	78.48	0.02	—	15.04					
9	188	21	0.1										—	484.46	+	216.76
				182	29.9	56.86	—	56.81	0.01	—	2.48					
10	98	32	0.1										—	541.26	+	214.28
				263	58.0	105.11	—	11.05	0.03	—	104.53					
11	128	31	0.1										—	552.28	+	109.75
				315	27.1	138.68	+	98.82	0.04	—	97.28	0.01				
12	176	30	0.1										—	453.42	+	12.46
				318	57,2											
13																
	789	32	0.5			380.56	—	47.52	0.10	—	219.33	0.01				
—	720	—				$s_4=-3.8$	—	47.42		—	219.34					
γ_4	$=69$	32	$p_4=\frac{1}{5}$	=	0.20	$r_4=0.26$	—	0.10		+	0.01					
	-69	31.′5						$\sqrt{0.10^2+0.01^2}$	=	0.10						
	Нев.	+ 0.5														
	Пред.	2.1						Пред.	0.38							

№ № пунктов	Измеренные углы		Поправки углов	Азимуты сторон		Длины линий	Вычисленные		Поправки Δx	Вычисленные		Поправки Δy	Координаты			
	0	1		0	1		±	Δx		±	Δy		±	x	±	y
								Х о д Z_5								
12	Правые		—						+			+	—	453.42	+	12.46
13	126	56	0.4	318	57.2	56.53	+	42.63	0.02	—	37.12	0.03	—	410.77	—	24.63
14	151	23	0.4	12	1.6	86.57	+	84.67	0.04	+	18.04	0.05	—	326.06	—	6.54
15				40	39.0	205.12	+	155.62	0.08	+	133.63	0.12	—	170.36	+	127.21
	278	19	0.8			348.22	+	282.92	0.14	+	114.55	0.20				
						$s_5=3.5$	—	0.14		—	0,20					
	Нев.	+ 0.8						$\sqrt{0.14^2+0.20^2}$	=	=	0.24					
	Пред.	2.1						Пред.		0.35						
								Х о д Z_6								
4	Правые		—						+			+	—	175.74	+	288.20
5	87	30	0.4	117	49.5	93.00	—	43.41	0.04	+	82.25	0.05	—	219.11	+	370.50
6	156	59	0.4	210	19.9	57.56	—	49.68	0.02	—	29.07	0.03	—	268.77	+	341.46
7	204	53	0.1	233	21.3	73.74	—	44.01	0.03	—	59.16	0.04	—	312.75	+	282.34
8				208	28.7	106.13	—	93.29	0.04	—	50.60	0.06	—	406.00	+	231.80
	449	22	1.2			330.43	—	230.39	0.13	—	56.58	0.18				
						$s_6=3.3$	—	0.13		—	0.18					
	Нев.	+ 1.2						$\sqrt{0.13^2+0.18^2}$		=	0.23					
	Пред.	2.6						Пред.		0.34						

Вычисления располагаются в схеме, указанной на стр. 62 по 66.

Вернейшие значения углов $\gamma_{1,2} = 102°50',3$ и $\gamma_{3,4} = 69°32',5$ с весами $p_{1,2} = 0{,}45$ и $p_{3,4} = 0{,}40$, значит, угол $\gamma_{1,2}$ равносилен 2,2 углам, а $\gamma_{3,4}$ — 2,5 углам. Сумма углов $\gamma_{1,2}$ и $\gamma_{3,4}$ вместе с углами ходов Z_5 и $Z_6 = 900°3',8$.

Невязка этой суммы углов $+3',8$.

Распределение этой невязки дает

на углы Z_5	$+0',8$
„ Z_6	$+1',2$
на углы $\gamma_{1,2}$	$+0',8$
„ $\gamma_{3,4}$	$+1',0$

Окончательные значения углов

$\gamma_{1,2}$	$102°49',5$
$\gamma_{3,4}$	$69°31',5$.

Вероятнейшие значения приращений абсцисс и ординат для узловых линий соответственно равны

$$(15—4) \ldots\ \Delta x_{1,2} = -\ 5{,}46;\quad \Delta y_{1,2} = +160{,}88$$

$$(8—12) \ldots\ \Delta x_{3,4} = -47{,}48;\quad \Delta y_{3,4} = -219{,}42.$$

Их вес

$$r_{1,2} = 0{,}54;\quad r_{3,4} = 0{,}69.$$

Следовательно, узловая линия (15—4) соответствует длине хода в 1,9 сотен метров, а узловая линия (8—12) — 1,5 сотен метров.

Суммы приращений абсцисс и ординат сомкнутого многоугольника, составленного сторонами ходов Z_5 и Z_6 и узловыми линиями (15—4) и (8—12), равны

$$\sum \Delta x = -0{,}41;\quad \sum \Delta y = -0{,}57.$$

Распределение этих невязок на ходы Z_5 и Z_6 и узловые линии дает

	Δx	Δy
Z_5	$-0{,}14$	$-0{,}20$
Z_6	$-0{,}13$	$-0{,}18$
(15—4)	$-0{,}08$	$-0{,}11$
(8—12)	$-0{,}06$	$-0{,}08$.

Окончательные значения приращений координат для узловых линий будут

	Δx	Δy
(15—4)	$-\ 5{,}38$	$+160{,}99$
(8—12)	$-47{,}42$	$-219{,}34$.

ГЛАВА V.

Определение меры влияния источников систематических и случайных ошибок на результаты измерений.

§ 27. Средняя квадратическая ошибка при совместном действии источников систематических и случайных ошибок.

Пусть имеем ряд равноточных измерений одной и той величины

$$a_1,\ a_2,\ \ldots .\ a_n$$

с систематическими ошибками соответственно

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots .\ \sigma_n \tag{166}$$

и со случайными ошибками

$$\varDelta_1,\ \varDelta_2,\ \ldots .\ \varDelta_n. \tag{167}$$

Обозначив полные ошибки в этих измерениях соответственно через

$$\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \ldots .\ \varepsilon_n, \tag{168}$$

мы можем написать, что

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \sigma_1 + \varDelta_1 \\ \varepsilon_2 &= \sigma_2 + \varDelta_2 \\ &\ldots\ldots \\ \varepsilon_n &= \sigma_n + \varDelta_n. \end{aligned} \tag{169}$$

Возведение в квадрат дает

$$\begin{aligned} \varepsilon_1{}^2 &= \sigma_1{}^2 + \varDelta_1{}^2 + 2\sigma_1\varDelta_1 \\ \varepsilon_2{}^2 &= \sigma_2{}^2 + \varDelta_2{}^2 + 2\sigma_2\varDelta_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varepsilon_n{}^2 &= \sigma_n{}^2 + \varDelta_n{}^2 + 2\sigma_n\varDelta_n, \end{aligned}$$

откуда, по сложении,

$$[\varepsilon^2] = [\sigma^2] + [\varDelta^2] + 2[\sigma\varDelta].$$

Разделив все члены этого равенства на n, получим

$$\frac{[\varepsilon^2]}{n} = \frac{[\sigma^2]}{n} + \frac{[\varDelta^2]}{n} + 2\frac{[\sigma\varDelta]}{n}. \tag{170}$$

Величины

$$\frac{[\varepsilon^2]}{n}, \quad \frac{[\sigma^2]}{n} \quad \text{и} \quad \frac{[\Delta^2]}{n}$$

суть квадраты средних квадратических ошибок рядов (166), (167) и (168). Обозначим эти средние квадратические ошибки соответственно через m_ε, m_σ и m_Δ.

Что касается последнего члена правой части равенства (170), то здесь нужно иметь в виду, что произведение $\sigma_k \Delta_k$ носит случайный характер и по величине и по знаку, а потому ряд таких произведений обладает всеми свойствами случайных ошибок. Следовательно, при большом числе n выражение $\frac{2[\sigma\Delta]}{n}$ можно считать величиной весьма малой по сравнении с m_σ^2 и m_Δ^2, и в равенстве (170) отбросить. Тогда это равенство примет вид

$$m_\varepsilon^2 = m_\sigma^2 + m_\Delta^2. \tag{171}$$

Необходимо отметить, что средняя квадратическая ошибка m_σ не имеет такой определенной связи с предельной ошибкой, какая была отмечена нами в свое время в отношении случайных ошибок. Бывают такие источники систематических ошибок, при которых в каждом измерении одной и той же величины систематическая ошибка одинакова и по величине и по знаку. Такова, например, ошибка в длине стальной ленты или мерного жезла. Бывают, наоборот, случаи, когда систематическая ошибка в измерениях по величине весьма изменчива, но сохраняет неизменно один и тот же знак. Таково, напр., влияние неточного укладывания мерного прибора вдоль измеряемой линии. Наконец, есть случаи, когда систематическая ошибка изменяется и по величине и по знаку, но это изменение происходит закономерно, а не случайно. В таких случаях именно эта закономерность и отличает систематическую ошибку от случайной. Таковы, например, систематические ошибки в делениях лимба, таково влияние наклона оси на результаты измерений углов и проч. Из сказанного ясно, что в одних случаях может оказаться

$$\sigma_{\text{пред.}} = m_\sigma\,, \tag{172}$$

а в других

$$\sigma_{\text{пред.}} > 3m_\sigma\,. \tag{173}$$

Поэтому, в каждом данном случае вопрос о предельной величине систематического влияния должен быть подвергнут особому изучению, величина же m_σ лишь указывает наименьшее возможное значение этого предела.

§ 28.

В предыдущем параграфе предполагалось, что на производимые измерения оказывает влияние один источник систематических ошибок и один источник случайных ошибок. В том случае, когда этих источников несколько, ошибки

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \ldots .\ \sigma_n$$

будут представлять собою совместное действие всех видов возможных в данном случае источников систематических ошибок, как равно

$$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \ldots .\ \Delta_n$$

будут представлять собою совместное действие всех видов источников случайных ошибок.

Предположим, что результаты измерений

$$a_1,\ a_2,\ \ldots .\ a_n$$

содержат систематические ошибки 1-го вида

$$\sigma'_1,\ \sigma'_2,\ \ldots .\ \sigma'_n$$

и систематические ошибки 2-го вида

$$\sigma''_1,\ \sigma''_2,\ \ldots .\ \sigma''_n .$$

Равным образом, пусть в этих измерениях содержатся случайные ошибки первого вида

$$\Delta'_1,\ \Delta'_2,\ \ldots .\ \Delta'_n$$

и случайные ошибки второго вида

$$\Delta''_1,\ \Delta''_2,\ \ldots .\ \Delta''_n .$$

Будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma'_1 + \sigma''_1 \\ \sigma_2 &= \sigma'_2 + \sigma''_2 \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \sigma_n &= \sigma'_n + \sigma''_n \end{aligned} \qquad (174)$$

и

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta'_1 + \Delta''_1 \\ \Delta_2 &= \Delta'_2 + \Delta''_2 \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \Delta_n &= \Delta'_n + \Delta''_n . \end{aligned} \qquad (175)$$

Возведение в квадрат и последующее затем сложение группы равенств (174) дает

$$[\sigma^2] = [\sigma'^2] + [\sigma''^2] + 2\,[\sigma'\,\sigma''] . \qquad (176)$$

а такие же действия в отношении равенств (175) дадут

$$[\Delta^2] = [\Delta'^2] + [\Delta''^2] + 2\,[\Delta'\,\Delta''] . \qquad (177)$$

По разделении на n частей равенств (176) и (177) получим

$$\frac{[\sigma^2]}{n} = \frac{[\sigma'^2]}{n} + \frac{[\sigma''^2]}{n} + 2\frac{[\sigma'\,\sigma'']}{n}$$

и

$$\frac{[\Delta^2]}{n} = \frac{[\Delta'^2]}{n} + \frac{[\Delta''^2]}{n} + 2\frac{[\Delta'\,\Delta'']}{n} .$$

Введя обозначения средних квадратических ошибок аналогично тому, как это сделано в предыдущем параграфе, будем иметь

$$m_\sigma^2 = m_{\sigma'}^2 + m_{\sigma''}^2 + 2\frac{[\sigma'\,\sigma'']}{n} \qquad (178)$$

и

$$m_\Delta^2 = m_{\Delta'}^2 + m_{\Delta''}^2 + 2\frac{[\Delta'\,\Delta'']}{n}. \qquad (179)$$

При n неограниченно возрастающем, выражение $\frac{[\Delta'\,\Delta'']}{n}$, как мы знаем, стремится к нулю. Но нельзя того же сказать про выражение $\frac{[\sigma'\,\sigma'']}{n}$. Можно показать, что

$$\frac{[\sigma'\,\sigma'']}{n} = \Theta'\,\Theta'',$$

где

$$\Theta' = \frac{[\sigma']}{n} \qquad (180)$$

и

$$\Theta'' = \frac{[\sigma'']}{n}. \qquad (181)$$

Таким образом, равенствам (178) и (179) можно придать вид

$$m_\sigma^2 = m_{\sigma'}^2 + m_{\sigma''}^2 + 2\Theta' \cdot \Theta'' \qquad (182)$$

и

$$m_\Delta^2 = m_{\Delta'}^2 + m_{\Delta''}^2. \qquad (183)$$

Двойные измерения.

§ 29. Двойные измерения одинаковой точности.

При исследовании инструмента, при изучении условий, в которых производятся измерения, имеет широкое применение метод двойных измерений одной и той же величины.

Пусть имеем два ряда таких двойных измерений

и
$$\left.\begin{matrix} a_1, & a_2, \ldots\ldots a_n \\ a'_1, & a'_2, \ldots\ldots a'_n, \end{matrix}\right\} \qquad (184)$$

произведенных одним инструментом и при одинаковых условиях, т. е. измерений равноточных.

Составим разности

$$\begin{aligned} a_1 - a'_1 &= d_1 \\ a_2 - a'_2 &= d_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ &\cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_n - a'_n &= d_n. \end{aligned}$$

Если бы не было ошибок в измерениях, то каждая пара измерений должна была бы дать совершенно одинаковые результаты, так что разность каждой пары таких измерений должна быть равна нулю.

Поэтому вычисленные значения

$$d_1,\ d_2, \ldots . d_n \tag{185}$$

можно рассматривать как истинные ошибки разности двойных измерений. Так как ряд (185) представляет собой ряд ошибок одинаково точных результатов измерений, то по нему мы можем определить среднюю квадратическую ошибку разности измерений по формуле

$$m_d = \pm \sqrt{\frac{[d^2]}{n}}. \tag{186}$$

С другой стороны, для разности одинаково точных измерений мы имеем формулу (58), которая в нашем случае примет вид

$$m_d = m_a \sqrt{2},$$

где m_a есть средняя квадратическая ошибка одного измерения рядов (184).

Поэтому можем написать

$$m_a = \frac{m_d}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{[d^2]}{2n}}. \tag{187}$$

Формула (187) справедлива в том случае, если ряд (185) представляет собой случайные ошибки. Если же разности двойных измерений содержат в себе и систематические влияния, то эти влияния нужно предварительно устранить.

Мы можем при достаточно большом числе пар измерений считать, что в $\sum\limits_1^n d$ случайные ошибки взаимно компенсируются, а систематические—суммируются, а потому можем положить

$$\frac{[d]}{n} = \frac{[\sigma]}{n},$$

где $\sigma_1,\ \sigma_2, \ldots \ldots \sigma_n$ систематические ошибки разности измерений $d_1,\ d_2, \ldots . d_n$.

Полагая по (180)

$$\frac{[\sigma]}{n} = \theta, \tag{188}$$

будем иметь

$$\theta = \frac{[d]}{n}. \tag{189}$$

Составим разности

$$\begin{aligned} d'_1 &= d_1 - \theta \\ d'_2 &= d_2 - \theta \\ &\ldots\ldots \\ d'_n &= d_n - \theta. \end{aligned}$$

Если систематические влияния $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ близки друг к другу, а значит, к своему среднему значению Θ, то величины $d'_1, d'_2, \ldots d'_n$ можно считать представляющими собой влияние случайных ошибок на разности двойных измерений.

Поэтому

$$m = \pm\sqrt{\frac{[d'^2]}{n-1}}. \qquad (190)$$

Здесь в знаменателе поставлено не n, а $n-1$, так как величины $d'_1, d'_2, \ldots d'_n$ представляют собой уже не истинные, а лишь вероятнейшие ошибки разностей двух измерений.

Для величины m_a будем иметь формулу

$$m_a = \pm\sqrt{\frac{[d'^2]}{2(n-1)}}. \qquad (191)$$

Пример 1. Сделано десять пар наведений нити микроскопа-микрометра на штрихи лимба. Требуется определить точность этого наведения.

№ № пар	1-е наведение	2-е наведение	Разности d	d^2
1	28″.3	27″.2	+1″.1	1.21
2	51.0	52.2	−1.2	1.44
3	35.5	36.0	−0.5	0.25
4	17.3	17.1	+0.2	0.04
5	24.8	25.7	−0.9	0.81
6	20.5	20.1	+0.4	0.16
7	3.4	4.1	−0.7	0.49
8	41.0	40.1	+0.9	0.81
9	38.7	38.2	+0.5	0.25
10	20.1	20.6	−0.5	0.25
			−0.5	5.71

$$\sigma = \frac{-0'',5}{10} = -0'',05$$

По знакам разностей d и по величине σ видно, что заметного влияния систематических ошибок, при наведении нитей микроскопа-микрометра, на разность отсчетов нет.

$$m_a = \pm\sqrt{\frac{5.71}{20}} = \pm 0''.54.$$

Пример 2. Произведено десять парных измерений длины линии. Определить меру систематического и случайного влияния на результаты измерений.

№№ пар	Измерение туда a	Измерение обратно a'	Разности $d = a - a'$	$d' = d - \delta$	d^2
1	$376^m.350$	$376^m.356$	-6^{mm}	$-4^{mm}.5$	20.25
2	.350	.368	−18	+ 7 .5	56.25
3	.355	.362	− 7	− 3 .5	12.25
4	.335	.352	−17	+ 6 .5	42.25
5	.348	.360	−12	+ 1 .5	2.25
6	.370	.380	−10	− 0 .5	0.25
7	.360	.370	−10	− 0 .5	0.25
8	.350	.360	−10	− 0 .5	0.25
9	.370	.375	− 5	− 5 .5	30.25
10	.360	.370	−10	− 0 .5	0.25
			−105	0 .0	164.50

Разности d все отрицательны; что ясно указывает на существование систематических ошибок измерения.

$$\sigma = -\frac{105^{mm}}{10} = -10^{mm}.5$$

$$m_a = \pm\sqrt{\frac{164 \cdot 50}{18}} = \pm\sqrt{9.14} = \pm 3^{mm}.0.$$

§ 30. Двойные измерения различной точности.

Пусть имеем *два* ряда парных измерений

и

$$\left.\begin{array}{l} a_1,\ a_2, \ldots, a_n \\ a'_1,\ a'_2, \ldots, a'_n \end{array}\right\} \qquad (192)$$

с весами соответственно

$$p_1,\ p_2, \ldots, p_n.$$

Составим разности

$$\begin{array}{l} a_1 - a'_1 = d_1 \\ a_2 - a'_2 = d_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_n - a'_n = d_n. \end{array}$$

. Веса этих разностей

$$P_1, P_2, \ldots, P_n$$

будут определяться по формуле (115)

$$P = \frac{p}{2}. \qquad (193)$$

Имея истинные ошибки

$$d_1, d_2, \ldots d_n$$

разностей парных измерений и веса этих разностей, мы можем вычислить среднюю квадратическую ошибку измерения с единицей веса

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[Pd^2]}{n}} = \pm\sqrt{\frac{[pd^2]}{2n}}. \qquad (194)$$

Установление доли систематического влияния в разностях двойных измерений показано ниже на примере.

Пример 1. Пронивелированы девятнадцать нивелирных ходов в прямом и обратном направлении и подсчитаны разности полученных результатов.

Определить среднюю квадратическую ошибку разности уровней двух соседних пикетов и среднюю квадратическую ошибку на одну версту хода.

Измеренные данные и схема решения приведены на стр. 76.

Распределение разностей d по знакам показывает, что систематического влияния в них нет

$$\mu_{1000} = \pm\sqrt{\frac{13034,10}{38}} = \pm\sqrt{343} = 18 \text{ тыс. саж.} = 0,018 \text{ саж.}$$

Для удобства вычислений вес вычислялся по формуле

$$p = \frac{1000}{n},$$

т. е. за единицу веса принималось измерение нивелирного хода в 1000 станций. Поэтому для одной станции будем иметь

$$m = \frac{\mu}{\sqrt{1000}} = \pm\sqrt{\frac{343}{1000}} = \pm 0,00059 \text{ саж.}$$

Для средней квадратической ошибки на версту будем иметь

$$m_b = m \cdot \sqrt{10} = \pm 0.0018 \text{ саж.}$$

Таким образом, предельная ошибка на версту в исследуемых ходах возможна до 0,006 саж.

№№ ходов	Разности d в тысячн. долях сажени	Число штативов	$p=\frac{1000}{n}$	d^2	pd^2
1	+ 2^{тс}.4	30	33	5.76	190.08
2	+ 6 .2	25	40	38.44	1537.60
3	+ 1 .6	31	32	2.56	81.92
4	+ 4 .9	17	59	24.01	1416.59
5	— 1 .3	37	27	1.69	45.63
6	— 7 .9	21	48	62.41	2995.68
7	— 3 .4	31	32	11.56	369.92
8	— 1 .8	7	143	3.24	463.32
9	+ 6 .8	31	32	46.24	1479.68
10	+ 3 .4	11	91	11.56	1051.96
11	— 4 .2	36	28	17.64	493.92
12	— 2 .4	9	111	5.76	639.36
13	— 2 .2	16	62	4.84	300.08
14	+ 1 .3	31	32	1.69	54.08
15	+ 2 .1	31	32	4.41	141.12
16	— 0 .6	14	71	0.36	25.56
17	— 4 .0	23	43	16.00	688.00
18	+ 1 .4	22	45	1.96	88.20
19	— 4 .5	21	48	20.25	972.00
					13034.10

Пример 2. Пронивелированы дважды 20 нивелирных ходов. Выяснить меру систематического и случайного влияния (см. таблицу на стр. 77).

Преобладание в графе разностей знака + над знаком — указывает на присутствие в этих разностях систематического влияния. Сложив все разности d, мы получим

$$\sum d = 90{,}0 \text{ тысячн. долей сажени.}$$

$$\sum n = 517.$$

$\sum d$ представляет сумму всех систематических и случайных ошибок в разностях на всех 517 станциях. Полагая измерения на каждой станции

№№ ходов	Разности d в тысячн. долях саж.	Число штативов n	$p=\frac{1000}{n}$	Систематич. ошибки σ	$d'=d-\sigma$	d'^2	pd'^2
1	— 7.6	27	37	+ 4.6	— 12.2	148.84	5507.08
2	+ 14.5	27	37	+ 4.6	+ 9.9	98.01	3626.37
3	+ 5.7	15	66	+ 2.6	+ 3.1	9.61	634.26
4	+ 2.2	39	26	+ 6.6	— 4.4	19.36	503.36
5	+ 1.4	30	33	+ 5.1	— 3.7	13.69	451.77
6	+ 9.4	23	44	+ 3.9	+ 5.5	30.25	1331.00
7	+ 11.3	13	77	+ 2.2	+ 9.1	82.81	6376.37
8	+ 5.3	24	42	+ 4.1	+ 1.2	1.44	60.48
9	+ 3.2	27	37	+ 4.6	— 1.4	1.96	72.52
10	+ 12.9	20	50	+ 3.4	+ 9.5	90.25	4512.50
11	— 3.4	38	26	+ 6.5	— 9.9	98.01	2548.26
12	+ 8.1	14	71	+ 2.4	+ 5.7	32.49	2306.79
13	— 0.7	20	50	+ 3.4	— 4.1	16.81	840.50
14	— 1.8	32	31	+ 5.4	— 7.2	51.84	1607.04
15	+ 11.7	38	26	+ 6.5	+ 5.2	27.04	702.04
16	— 1.6	8	125	+ 1.4	— 3.0	9.00	1125.00
17	+ 9.6	23	44	+ 3.9	+ 5.7	32.49	1429.56
18	— 3.9	20	50	+ 3.4	— 7.3	53.29	2664.50
19	+ 2.0	36	28	+ 6.1	— 4.1	16.81	470.68
20	+ 11.7	43	23	+ 7.3	— 4.4	19.36	445.28
	+ 90.0	517			— 6.8		37217.36

равноточными, можно считать, что в $\sum d$ случайные ошибки в значительной мере взаимно компенсировались, так что эта $\sum d$ представляет собою преимущественно сумму систематических ошибок. Если предполагать, что систематическое влияние на каждую станцию достаточно устойчиво, то, обозначая его через λ, мы будем иметь

$$\lambda=\frac{\sum d}{\sum n} \qquad (195)$$

по подсчету

$$\lambda=\frac{+90\cdot 0^{т.\,с}}{517}=+0.17^{т.\,с}=+0.00017 \text{ саж.}$$

Влияние этой ошибки на разность нивелирного хода при двух измерениях пропорционально числу станций этого хода, так что

$$\sigma=\lambda n. \tag{196}$$

Вычитая величину σ из каждой разности d, мы получим

$$d'=d-\sigma,$$

где d' будет влияние случайных ошибок на разность двойных измерений. Эти значения d' будут не истинными, а вероятнейшими ошибками; поэтому к ним применима формула

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{[Pd'^2]}{n-1}}, \tag{197}$$

а так как по (193)

$$P=\frac{p}{2},$$

то

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{[pd'^2]}{2(n-1)}}. \tag{198}$$

Применяя эту формулу к нашему случаю, будем иметь

$$\mu_{1000}=\pm\sqrt{\frac{37217,36}{38}}=\pm\sqrt{979,50}=\pm 31 \text{ тыс. саж.}$$

Отсюда на одну станцию

$$m=\pm\frac{\mu_{1000}}{\sqrt{1000}}=\pm\sqrt{0,980}=\pm 0,99 \text{ тыс. } с.=\pm 0,00099 \text{ саж.},$$

а на версту

$$m_в=m\sqrt{10}=\pm 0,0031 \text{ саж.}$$

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

СПОСОБ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ.

ГЛАВА I.

§ 31. Принцип наименьших квадратов.

В теории ошибок мы установили, что вероятнейшим результатом равноточных измерений является арифметическая средина, для неравноточных измерений — общая арифметическая средина. Первая есть частный случай второй, когда все веса измерений одинаковы.

Остановимся на выяснении свойств общей арифметической средины.

Пусть имеем ряд неравноточных измерений

$$a_1,\ a_2, \ldots, a_n \tag{1}$$

одной и той же величины X с весами

$$p_1,\ p_2, \ldots, p_n. \tag{2}$$

Общая арифметическая средина получится по формуле

$$x_0 = \frac{[ap]}{[p]}.$$

Вероятнейшие ошибки измерений будут соответственно

$$\left.\begin{aligned} x_0 - a_1 &= \delta_1 \\ x_0 - a_2 &= \delta_2 \\ \cdot\ \cdot\ &\cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_0 - a_n &= \delta_n \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

При чем нами в III главе первой части настоящего курса (формула 105) было установлено, что

$$[p\delta] = 0. \tag{4}$$

Возьмем вместо общей арифметической средины какое-нибудь другое значение x.

Обозначая разности между этим значением x и каждым отдельным измерением ряда (1) соответственно через

$$v_1,\ v_2, \ldots, v_n,$$

будем иметь

$$\left.\begin{array}{l} x - a_1 = v_1 \\ x - a_2 = v_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x - a_n = v_n \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Вычитая из частей равенств (5) соответствующие части равенств (3), получим

$$\left.\begin{array}{l} x - x_0 = v_1 - \delta_1 \\ x - x_0 = v_2 - \delta_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x - x_0 = v_n - \delta_n \end{array}\right\}$$

Обозначив $x - x_0$ через ε, можем написать на основании этих равенств, что

$$\begin{array}{l} v_1 = \delta_1 + \varepsilon \\ v_2 = \delta_2 + \varepsilon \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_n + \delta_n + \varepsilon, \end{array}$$

откуда, по возведении в квадрат,

$$\begin{array}{l} v_1^2 = \delta_1^2 + 2\delta_1\varepsilon + \varepsilon^2 \\ v_2^2 = \delta_2^2 + 2\delta_2\varepsilon + \varepsilon^2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ v_n^2 = \delta_n^2 + 2\delta_n\varepsilon + \varepsilon^2. \end{array}$$

Помножив все члены каждого равенства на соответствующий вес получим

$$\begin{array}{l} p_1v_1^2 = p_1\delta_1^2 + 2p_1\delta_1\varepsilon + p_1\varepsilon^2 \\ p_2v_2^2 = p_2\delta_2^2 + 2p_2\delta_2\varepsilon + p_2\varepsilon^2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ p_nv_n^2 = p_n\delta_n^2 + 2p_n\delta_n\varepsilon + p_n\varepsilon^2. \end{array}$$

Сложение соответствующих частей этих равенств дает

$$[pv^2] = [p\delta^2] + 2\varepsilon\,[p\delta] + [p]\varepsilon^2.$$

Но, по (4),

$$[p\delta] = 0,$$

а потому

$$[pv^2] = [p\delta^2] + [p]\varepsilon^2. \qquad (6)$$

В написанном равенстве все три члена существенно положительны. Поэтому можно вывести заключение, что

$$[p\delta^2] < [pv^2]. \qquad (7)$$

Так как значение x взято было нами произвольно, то, значит, неравенство (7) справедливо для всякого значения величины x, отличающегося от общей арифметической средины x_0.

Следовательно, при $x = x_0$, выражение $[pv^2]$ принимает наименьшее из всех возможных для него при данных условиях значений, т. е.

$$[p\delta^2] = min\,[pv^2]. \tag{8}$$

В случае равноточных измерений нужно положить

$$p_1 = p_2 = \ldots . = p_n = 1,$$

и формула (6) принимает вид

$$[v^2] = [\delta^2] + n\varepsilon^2. \tag{9}$$

§ 32.

Выражение (8) обладает свойством обратимости. В самом деле, пусть имеем ряд неравноточных измерений

$$a_1\,,\ a_2\,, \ldots .\ a_n \tag{10}$$

одной и той же величины X с весами

$$p_1\,,\ p_2\,, \ldots ., p_n. \tag{11}$$

Требуется найти на основании данных измерений такое значение x, для которого

$$[pv^2] = minimum. \tag{12}$$

Имеем

$$\begin{aligned} x - a_1 &= v_1 \\ x - a_2 &= v_2 \\ . \ . \ . &\ . \ . \\ x - a_n &= v_n. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения v в (12) и обозначив $[pv^2]$ через y, будем иметь

$$y = [pv^2] = p_1 v_1{}^2 + p_2 v_2{}^2 + \ldots + p_n v_n{}^2 = \tag{13}$$

$$= p_1\,(x - a_1)^2 + p_2\,(x - a_2)^2 + \ldots + p_n\,(x - a_n)^2 = minimum;$$

y есть функция аргумента x.

Для отыскания момента, когда y примет наименьшее значение, возьмем производную $\frac{dy}{dx}$ и приравняем ее нулю. Получим

$$\frac{dy}{dx} = 2p_1\,(x - a_1) + 2p_2\,(x - a_2) + \ldots . + 2p_n\,(x - a_n) = 0,$$

или

$$p_1\,(x - a_1) + p_2\,(x - a_2) + \ldots . + p_n\,(x - a_n) = 0.$$

Решая это уравнение относительно x, будем иметь

$$x = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots .. + a_n p_n}{p_1 + p_2 + \ldots . + p_n} = \frac{[ap]}{[p]}. \tag{15}$$

Отсюда мы видим, что выражение $[pv^2]$ обращается в *minimum*, когда вместо истинного значения измеренной величины мы берем общую арифметическую средину.

Если все измерения равноточны, то, принимая

$$p_1 = p_2 = \ldots\ldots = p_n = 1,$$

мы из формулы (15) получим

$$x = \frac{[a]}{n}, \tag{16}$$

а выражение (12) принимает вид

$$[v^2] = minimum. \tag{17}$$

Таким образом, принцип „наименьших квадратов“ является основным принципом всей теории ошибок.

§ 33.

Выведенные в предыдущих параграфах формулы имеют практическое значение при вычислении средней квадратической ошибки из достаточно большого ряда измерений, что видно из прилагаемого ниже примера обработки результатов определения времени по ритмическим сигналам.

Арифметическую средину в данном примере имеет смысл взять с округлением до $0^s{,}001$. Получим $t_0 = 20^h\,19^m\,25^s{,}154$. Вычисление средней квадратической ошибки ряда по вероятнейшим ошибкам δ дает

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\delta^2]}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{0{,}011776}{15}} = \pm\sqrt{0{,}000785} = \pm 0^s{,}028.$$

Но вычисления эти можно упростить, взяв для подсчета уклонений v, вместо арифметической средины t_0, значение t, округленное до $0^s{,}01$, т. е. $t = 20^h\,19^m\,25^s{,}15$. Подсчет v и v^2 становится значительно проще, при чем $[v^2]$ оказывается равной 0,0120. Для определения по ней $[\delta^2]$ воспользуемся формулой (9):

$$[v^2] = [\delta^2] + n\varepsilon^2.$$

В нашем случае

$$\varepsilon = t - t_0 = -0^s.004.$$

Определяя $[\delta^2]$ по этой формуле, будем иметь

$$[\delta^2] = 0{,}0120 - 16 \cdot (0{,}004)^2 = 0{,}011744.$$

Полученный результат несколько отличается от того, что нами получено непосредственным подсчетом вероятнейших ошибок δ, так как значение арифметической средины мы взяли тоже с известным округлением; но это не имеет никакого практического значения, так как не оказывает заметного влияния на величину средней квадратической ошибки.

$$m = \pm\sqrt{\frac{0.011744}{15}} = \pm\sqrt{0{,}000783} = \pm 0^s{,}028.$$

Получился тот же результат, что и раньше.

№ №	Измерения t	δ	δ^2	υ	υ^2
1	$20^h19^m25^s.12$	$+0^s.034$	0.001156	$+0^s.03$	0.0009
2	25 .16	— 0 .006	36	— 0 .01	1
3	25 .18	— 0 .026	676	— 0 .03	9
4	25 .15	+ 0 .004	16	0 .06	0
5	25 .21	— 0 .056	3136	— 0 .06	36
6	25 .14	+ 0 .014	196	+ 0 .01	1
7	25 .15	+ 0 .004	16	0 .00	0
8	25 .14	+ 0 .014	196	+ 0 .01	1
9	25 .17	— 0 .016	256	— 0 .02	4
10	25 .11	+ 0 .044	1936	+ 0 .04	16
11	25 .20	— 0 .046	2116	— 0 .05	25
12	25 .13	+ 0 .024	576	+ 0 .02	4
13	25 .16	— 0 .006	36	— 0 .01	1
14	25 .13	+ 0 .034	1156	+ 0 .03	9
15	25 .15	+ 0 .004	16	0 .00	0
16	25 .17	— 0 .016	256	— 0 .02	4
	20 19 25 .154	+ 0 .004	0.011776	— 0 .06	0.0120

ГЛАВА II.

Посредственные измерения.

§ 34. Общие основания уравновешивания посредственных измерений.

Бывают случаи, когда непосредственно измеряются функции некоторых неизвестных величин (аргументов) и требуется на основании этих измерений определить вероятнейшие значения означенных неизвестных аргументов.

Пусть измерялись n величин, истинные значения которых суть

$$Q_1, Q_2, \ldots, Q_n. \tag{18}$$

Пусть при измерении этих величин получились результаты соответственно

$$q_1, q_2, \ldots q_n \tag{19}$$

с истинными ошибками

$$\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n. \tag{20}$$

Предположим, для общности, что измерения наши были неравноточными и обозначим веса их соответственно через

$$p_1, p_2, \ldots, p_n. \tag{21}$$

Пусть каждая из величин ряда (18) есть функция k неизвестных величин, истинные значения которых суть

$$X, Y, \ldots W, \tag{22}$$

так что

$$\left.\begin{array}{l} Q_1 = f_1(X, Y \ldots W) \\ Q_2 = f_2(X, Y \ldots W) \\ \cdots\cdots\cdots \\ Q_n = f_n(X, Y \ldots W) \end{array}\right\} \tag{23}$$

С другой стороны, на основании обозначений (18), (19) и (20), мы можем написать, что

$$\begin{array}{l} Q_1 - q_1 = \Delta_1 \\ Q_2 - q_2 = \Delta_2 \\ \cdots\cdots \\ Q_n - q_n = \Delta_n. \end{array}$$

Откуда, принимая во внимание (23), будем иметь

$$\left.\begin{array}{l} f_1(X,\ Y,\ldots W)-q_1=\Delta_1 \\ f_2(X,\ Y,\ldots W)-q_2=\Delta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(X,\ Y,\ldots W)-q_n=\Delta_n \end{array}\right\} \qquad (24)$$

Истинных значений X, $Y,\ldots W$ мы не знаем. Возьмем вместо них некоторую группу значений (пока произвольную) x, $y,\ldots w$ и подставим в уравнения (24).

Тогда, с изменением левых частей этих равенств, изменятся соответственно и правые части их. Обозначим правые части равенств (24) после указанной подстановки через v_1, $v_2,\ldots v_n$

Будем иметь

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x,\ y,\ldots w)-q_1=v_1 \\ f_2(x,\ y,\ldots w)-q_2=v_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x,\ y,\ldots w)-q_n=v_n \end{array}\right\} \qquad (25)$$

Уравнения (25) называются *начальными уравнениями ошибок.*

Зададимся целью отыскать вероятнейшие значения аргументов x, $y,\ldots w$. Для этой цели воспользуемся выведенным в предыдущем параграфе основным принципом теории ошибок „принципом наименьших квадратов“ (12) и применим его к нашему случаю.

$$[pv^2]=minimum. \qquad (26)$$

Обозначим величину $[pv^2]$ через σ. Так как уклонения v по 25) суть функции аргументов x, $y,\ldots w$, то и величина σ есть тоже некоторая функция этих аргументов.

$$\sigma=[pv^2]=F(x,\ y,\ldots w)=minimum. \qquad (27)$$

Так как аргументы x, $y,\ldots w$ независимы между собою, то для отыскания значений этих аргументов, при которых функция σ принимает наименьшее значение, нужно по правилам высшего анализа взять от этой функции частные производные по каждому аргументу и приравнять каждую производную нулю.

Получим

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial\sigma}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial\sigma}{\partial y}=0 \\ \ldots \\ \frac{\partial\sigma}{\partial w}=0 \end{array}\right\} \qquad (28)$$

Так как

$$\sigma=p_1v_1{}^2+p_2v_2{}^2+\ldots+p_nv_n{}^2,$$

то написанные частные производные примут вид

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x}=2p_1v_1\frac{\partial v_1}{\partial x}+2p_2v_2\frac{\partial v_2}{\partial x}+\ldots.+2p_nv_n\frac{\partial v_n}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y}=2p_1v_1\frac{\partial v_1}{\partial y}+2p_2v_2\frac{\partial v_2}{\partial y}+\ldots.+2p_nv_n\frac{\partial v_n}{\partial y}=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial w}=2p_1v_1\frac{\partial v_1}{\partial w}+2p_2v_2\frac{\partial v_2}{\partial w}+\ldots.+2p_nv_n\frac{\partial v_n}{\partial w}=0.$$

Сокращая на 2 и применяя сокращенные обозначения, будем иметь

$$\left.\begin{array}{l}[pv\frac{\partial v}{\partial x}]=0\\ [pv\frac{\partial v}{\partial y}]=0\\ \cdots\cdots\\ [pv\frac{\partial v}{\partial w}]=0\end{array}\right\} \qquad (29)$$

Полученные уравнения называются нормальными.

Нормальных уравнений столько, сколько и неизвестных аргументов. Решая их, мы и найдем искомые вероятнейшие значения аргументов.

Если все измеренные значения функций равноточны, то, принимая

$$p_1=p_2=\ldots.=p_n=1,$$

мы приведем условие (27) к виду

$$\sigma=[v^2]=F(x,\ y,\ldots.\ w)=minimum, \qquad (30)$$

а нормальные уравнения примут вид

$$\left.\begin{array}{l}[v\frac{\partial v}{\partial x}]=0\\ [v\frac{\partial v}{\partial y}]=0\\ \cdots\cdots\\ [v\frac{\partial v}{\partial w}]=0\end{array}\right\} \qquad (31)$$

Надо заметить, что определение значений аргументов из нормальных уравнений возможно лишь тогда, когда число измеренных функций больше числа неизвестных, т. е. когда

$$n>k. \qquad (32)$$

Если $n<k$, то задача становится неопределенной. Если $n=k$, то неизвестные определяются из начальных уравнений ошибок приравниванием правых частей их нулю.

§ 35. Вывод нормальных уравнений для случая линейных функций

Пусть измеренные непосредственно величины

$$Q_1,\ Q_2, \ldots, Q_n$$

суть линейные функции аргументов вида

$$Q = aX + bY + \ldots . + gW + r. \qquad (33)$$

Если ввести обозначение

$$r_1 - q_1 = l_1,$$

то начальные уравнения ошибок (25) примут вид

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + \ldots . + g_1 w + l_1 = v_1 \\ a_2 x + b_2 y + \ldots . + g_2 w + l_2 = v_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n x + b_n y + \ldots . + g_n w + l_n = v_n \end{array}\right\} \qquad (35)$$

Пользуясь этими уравнениями, составим нормальные уравнения (31) для случая равноточных измерений. Возьмем первое из них

$$[v] \frac{\partial v}{\partial x}] = 0,$$

или в раскрытой форме

$$v_1 \frac{\partial v}{\partial x} + v_2 \cdot \frac{\partial v_2}{\partial x} + \ldots . + v_n \cdot \frac{\partial v_n}{\partial x} = 0.$$

На основании уравнений (35) имеем

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = a_1, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x} = a_2, \ldots, \quad \frac{\partial v_n}{\partial x} = a_n, \qquad (36)$$

так что первому нормальному уравнению можно придать вид

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \ldots . + a_n v_n = 0$$

или

$$[av] = 0. \qquad (37)$$

Точно так же для второго нормального уравнения получим

$$[bv] = 0 \qquad (38)$$

и т. д., и, наконец, для последнего

$$[gv] = 0. \qquad (39)$$

Произведем в уравнении (37) показанные в нем действия, для чего помножим все члены начальных уравнений (35) соответственно на коэффициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и результаты сложим.

Будем иметь

$$\begin{array}{l}
a_1 a_1 x + a_1 b_1 y + \ldots . + a_1 g_1 w + a_1 l_1 = a_1 v_1 \\
a_2 a_2 x + a_2 b_2 y + \ldots . + a_2 g_2 w + a_2 l_2 = a_2 v_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\underline{a_n a_n x + a_n b_n y + \ldots . + a_n g_n w + a_n l_n = a_n v_n} \\
[aa] x + [ab] y + \ldots . + [ag] w + [al] = [av]
\end{array}.$$

Таким образом, первое нормальное уравнение принимает вид

$$[aa] x + [ab] y + \ldots . + [ag] w + [al] = 0. \qquad (40)$$

Таким же путем можно раскрыть и все другуе нормальные уравнения, так что вся система нормальных уравнений представится в следующем виде:

$$\begin{array}{l}
M \\
\;\nwarrow \\
\quad [aa] x + [ab] y + \ldots . + [ag] w + [al] = 0 \\
\quad [ab] x + [bb] y + \ldots . + [bg] w + [bl] = 0 \\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\quad [ag] x + [bg] y + \ldots . + [gg] w + [gl] = 0 \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \searrow N
\end{array} \qquad (41)$$

Рассматривая эту систему, мы видим, что в ней, по диагонали MN направо и вниз, расположены квадратические коэффициенты. Все эти коэффициенты положительны. Далее, коэффициенты, расположенные симметрично относительно этой диагонали, попарно равны между собой.

Составим теперь нормальные уравнения для линейных функций, измеренных с различной точностью (29). Тогда, зная, что по (36)

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} = a_1, \frac{\partial v_2}{\partial x} = a_2, \text{ и т. д.},$$

мы можем придать уравнениям (29) вид

$$\left.\begin{array}{l}
[pav] = 0 \\
[pbv] = 0 \\
\ldots \\
[pgv] = 0
\end{array}\right\} \qquad (42)$$

Раскрывая эти уравнения только что описанным способом, мы придем к таким результатам:

$$\left.\begin{array}{l}
[paa] x + [pab] y + \ldots . + [pag] w + [pal] = 0 \\
[pab] x + [pbb] y + \ldots . + [pbg] w + [pbl] = 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
[pag] x + [pbg] y + \ldots . + [pgg] w + [pgl] = 0
\end{array}\right\} \qquad (43)$$

Полученную систему нормальных уравнений для случая неравноточных измерений легко привести в связь с системой нормальных уравнений при равноточных измерениях. Для этого введем обозначения:

$$a_i\sqrt{p_i}=a'_i;\, b_i\sqrt{p_i}=b'_i,\,\ldots,g_i\sqrt{p_i}=g'_i;\, l_i\sqrt{p_i}=l'_i \qquad (44)$$

Тогда уравнения (43) примут вид

$$\left.\begin{array}{l} [a'a']\,x+[a'b']\,y+\ldots+[a'g']\,w+[a'l']=0 \\ [a'b']\,x+[b'b']\,y+\ldots+[b'g']\,w+[b'l']=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [a'g']\,x+[b'g']\,y+\ldots+[g'g']\,w+[g'l']=0 \end{array}\right\} \qquad (45)$$

Мы получили уравнения, совершенно аналогичные уравнениям (41).

Более того, если мы помножим члены начальных уравнений (35) на корень квадратный из соответствующего веса, то будем иметь

$$\begin{array}{l} a_1\sqrt{p_1}\,x+b_1\sqrt{p_1}\,y+\ldots+g_1\sqrt{p_1}\,w+l_1\sqrt{p_1}=v_1\sqrt{p_1} \\ a_2\sqrt{p_2}\,x+b_2\sqrt{p_2}\,y+\ldots+g_2\sqrt{p_2}\,w+l_2\sqrt{p_2}=v_2\sqrt{p_2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n\sqrt{p_n}\,x+b_n\sqrt{p_n}\,y+\ldots+g_n\sqrt{p_n}\,w+l_n\sqrt{p_n}=v_n\sqrt{p_n}. \end{array}$$

Принимая во вниманае обозначения (44) и, кроме того, обозначив

$$v_1\sqrt{p_1}=v'_1;\, v_2\sqrt{p_2}=v'_2,\,\ldots,v_n\sqrt{p_n}=v'_n, \qquad (46)$$

получим

$$\left.\begin{array}{l} a'_1x+b'_1y+\ldots+g'_1w+l'_1=v'_1 \\ a'_2x+b'_2y+\ldots+g'_2w+l'_2=v'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_nx+b'_ny+\ldots+g'_nw+l'_n=v'_n \end{array}\right\} \qquad (47)$$

Определим веса свободных членов

$$l'_1,\ l'_2,\ldots,l'_n.$$

Согласно наших обозначений

$$l'_i=l_i\sqrt{p_i}.$$

Вес l_i есть p_i. Значит, вес величины l'_i, который мы обозначим через p'_i, получится по формуле (112) первой части настоящего курса равным

$$p'_i=\frac{p_i}{(\sqrt{p_i})^2}=1.$$

Значит, величины $l'_1, l'_2,\ldots, l'_n$ являются равноточными, каждая с весом единица.

Таким образом, вводя обозначения (44), мы свели дело к равноточным измерениям не только по форме, но и по существу.

Рассмотрим теперь более детально случай равноточных измерений.

§ 36. Решение системы нормальных уравнений.

Нормальные уравнения представляют собой систему k линейных уравнений с k неизвестными. Такая система дает для каждого неизвестного, вообще говоря, одно значение, т. е. приводит нас к вполне определенному единственному ответу на вопрос. Решение нормальных уравнений является с теоретической точки зрения делом весьма простым и может быть выполнено любым из указанных в алгебре способов. Но по ряду соображений, которые будут ясны в дальнейшем, принято решать систему нормальных уравнений способом последовательной подстановки, начиная с первого неизвестного первого нормального уравнения. При этом не допускается ни умножения, ни деления обеих частей уравнения на какое-нибудь число за исключением случая деления на коэффициент при определяемом неизвестном. Такой способ решения нормальных уравнений был предложен Гауссом и носит его имя.

Для простоты рассмотрим сначала случай трех нормальных уравнений с тремя неизвестными.

$$\left.\begin{aligned} [aa]\,x+[ab]\,y+[ac]\,z+[al]&=0\\ [ab]\,x+[bb]\,y+[bc]\,z+[bl]&=0\\ [ac]\,x+[bc]\,y+[cc]\,z+[cl]&=0 \end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

Определим из первого уравнения значение неизвестного x.

$$x=-\frac{[ab]}{[aa]}y-\frac{[ac]}{[aa]}z-\frac{[al]}{[aa]}. \qquad (49)$$

Подставляя это значение во второе и третье уравнения, мы получим после приведения подобных членов

$$\left([bb]-\frac{[ab][ab]}{[aa]}\right)y+\left([bc]-\frac{[ab][ac]}{[aa]}\right)z+\left([bl]-\frac{[ab][al]}{[aa]}\right)=0$$

$$\left([bc]-\frac{[ab][ac]}{[aa]}\right)y+\left([cc]-\frac{[ac][ac]}{[aa]}\right)z+\left([cl]-\frac{[ac][al]}{[aa]}\right)=0.$$

Введем для удобства обозначения

$$\left.\begin{aligned} [bb]-\frac{[ab][ab]}{[aa]}&=[bb\cdot 1]\\ [bc]-\frac{[ab][ac]}{[aa]}&=[bc\cdot 1] \end{aligned}\right\} \qquad (50)$$

и т. д. Будем иметь

$$\left.\begin{aligned} [bb\cdot 1]y+[bc\cdot 1]z+[bl\cdot 1]&=0\\ [bc\cdot 1]y+[cc\cdot 1]z+[cl\,.\,1]&=0 \end{aligned}\right\} \qquad (51)$$

Получилась новая система уравнений, которая обладает всеми свойствами системы нормальных уравнений.

Что в уравнениях (51) коэффициенты при неизвестных симметричны относительно диагонали, проходящей через квадратичные коэффициенты,—это очевидно. Для того же, чтобы убедиться в том, что коэффициенты, расположенные по этой диагонали, положительны, разложим какой-нибудь из них, напр. $[bb \cdot 1]$. Будем иметь последовательно

$$[bb \cdot 1]=[bb]-\frac{[ab][ab]}{[aa]}=\frac{[bb][aa]-[ab][ab]}{[aa]}=$$

$$=\frac{[a^2b^2]+[a_ra_rb_ib_i]+[a_ia_ib_rb_r]-[a^2b^2]-[a_ib_ia_rb_r]-[a_rb_ra_ib_i]}{[aa]}=$$

$$=\frac{[a_ib_r(a_ib_r-a_rb_i)-a_rb_i(a_ib_r-a_rb_i)]}{[aa]}=\frac{[(a_ib_r-a_rb_i)^2]}{[aa]}, \qquad (52)$$

т. е. $[bb \cdot 1]$ всегда положительно.

Определим теперь из первого уравнения новой системы (51) уравнений значение неизвестного y:

$$y=-\frac{[bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}z-\frac{[bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}. \qquad (53)$$

Подставляя это значение y во второе уравнение системы (51), получим по преобразовании

$$\left([cc \cdot 1]-\frac{[bc \cdot 1][bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}\right)z+\left([cl \cdot 1]-\frac{[bc \cdot 1][bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}\right)=0.$$

Введем обозначения

$$\left.\begin{aligned}
[cc \cdot 1]-\frac{[bc \cdot 1][bc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}&=[cc \cdot 2]\\
[cl \cdot 1]-\frac{[bc \cdot 1][bl \cdot 1]}{[bb \cdot 1]}&=[cl \cdot 2]
\end{aligned}\right\} \qquad (54)$$

Будем иметь

$$[cc \cdot 2]z+[cl \cdot 2]=0. \qquad (55)$$

Из этого уравнения определяется величина неизвестного z:

$$z=-\frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}. \qquad (56)$$

В правой части этого уравнения все величины известны и потому неизвестное z может быть вычислено.

Зная величину z, можно определить из (52) уравнения значение неизвестного y, а после этого из (49) уравнения найти значение неизвестного x.

Из сказаного видно, что систему нормальных уравнений (48) можно заменить эквивалентной системой

$$\left.\begin{aligned}
[aa]x+[ab]y+[ac]z+[al]&=0\\
[bb \cdot 1]y+[bc \cdot 1]z+[bl \cdot 1]&=0\\
[cc \cdot 2]z+[cl \cdot 2]&=0
\end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

которая в порядке отыскания величин неизвестных может быть представлена в виде

$$\left.\begin{aligned} z &= -\frac{[cl\cdot 2]}{[cc\cdot 2]} \\ y &= -\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\cdot z - \frac{[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]} \\ x &= -\frac{[ab]}{[aa]}y - \frac{[ac]}{[aa]}z - \frac{[al]}{[aa]} \end{aligned}\right\} \qquad (58)$$

Теперь не трудно приведенный метод преобразования системы трех нормальных уравнений и связанные с ним символические обозначения распространить на систему с любым числом уравнений.

Так, систему k нормальных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} [aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + \ldots + [ag]\,w + [al] = 0 \\ [ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + \ldots + [bg]\,w + [bl] = 0 \\ [bc]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z + \ldots + [cg]\,w + [cl] = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [ag]\,x + [bg]\,y + [cg]\,z + \ldots + [gg]\,w + [gl] = 0 \end{array}\right\} \qquad (59)$$

можно заменить для решения их следующей эквивалентной системой

$$\left.\begin{array}{r} [aa]\,x + [ab]\,y + \quad [ac]\,z + \ldots + \qquad [ag]\,w + [al] = 0 \\ [bb\cdot 1]\,y + [bc\cdot 1]\,z + \ldots + [bg\cdot 1]\,w + [bl\cdot 1] = 0 \\ [cc\cdot 2]\,z + \ldots + [cg\cdot 2]\,w + [cl\cdot 2] = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [gg\cdot (k-1)]\,w + [gl\cdot (k-1)] = 0 \end{array}\right\} \qquad (60)$$

Что касается символических обозначений, то они весьма просты и однообразны. Так, например, для раскрытия символа $[fr\cdot 4]$ мы прежде всего по числу 4 определяем, что это выражение получилось после исключения 4-го неизвестного. Четвертому неизвестному соответствует коэффициент d со значками.

Поэтому, по аналогии с (54), мы можем написать, что

$$[fr\cdot 4] = [fr\cdot 3] - \frac{[df\cdot 3]\,[dr\cdot 3]}{[dd\cdot 3]} \qquad (61)$$

Раскрывая, в свою очередь, символические обозначения в правой части этого равенства, мы можем довести это раскрытие до того, что в правой части будем иметь алгебраическое выражение, состоящее из коэффициентов и свободных членов основной системы нормальных уравнений. В качестве контроля полезно при раскрытии символов иметь в виду, что если, по раскрытии символа в правой части, опустить квадратные скобки и рассматривать полученное выражение как алгебраическое, то оно будет тождественно равно нулю. Так, для выражения (61), опуская квадратные скобки в правой части, будем иметь

$$fr\cdot 3 - \frac{df\cdot 3\cdot dr\cdot 3}{dd\cdot 3} = 0.$$

Если в правой части равенства (61) раскрывать постепенно только первый член, то будем иметь последовательно

$$[fr \cdot 4] = [fr \cdot 2] - \frac{[cf \cdot 2][cr \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} - \frac{[df \cdot 3][dr \cdot 3]}{[dd \cdot 3]},$$

$$[fr \cdot 4] = [fr \cdot 1] - \frac{[bf \cdot 1][br \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} - \frac{[cf \cdot 2][cr \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} - \frac{[df \cdot 3][dr \cdot 3]}{[dd \cdot 3]},$$

$$[fr \cdot 4] = [fr] - \frac{[af][ar]}{[aa]} - \frac{[bf \cdot 1][br \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} -$$

$$- \frac{[cf \cdot 2][cr \cdot 2]}{[cc \cdot 2]} - \frac{[df \cdot 3][dr \cdot 3]}{[dd \cdot 3]}. \qquad (62)$$

§ 37. Связь между вероятнейшими ошибками и результатами непосредственных измерений.

Возьмем начальные уравнения ошибок

$$\begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + \ldots . + g_1 w + l_1 = v_1 \\ a_2 x + b_2 y + \ldots . + g_2 w + l_2 = v_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n x + b_n y + \ldots . + g_n w + l_n = v_n. \end{array}$$

Помножим члены каждого уравнения на соответствующую ошибку v и сложим результаты. Получим

$$[av]x + [bv]y + \ldots . +]gv]w + [lv] = [v^2].$$

Но, согласно формул (37), (38), (39),

$$[av] = 0; [bv] = 0; \ldots\ [gv] = 0,$$

а потому

$$[lv] = [v^2]. \qquad (63)$$

Помножим теперь члены каждого начального уравнения ошибок на соответствующий свободный член l и результаты сложим.

Будем иметь

$$[al]x + [bl]y + \ldots . + [gl]w + [ll] = [lv]. \qquad (64)$$

Мы получили добавочное уравнение к k нормальным уравнениям. Если при решении нормальных уравнений мотодом Гаусса мы будем подставлять значения исключаемых неизвестных в уравнение (64) и применять символические обозначения, согласно § 36, мы будем иметь, по исключении $(k-1)$ неизвестных, уравнение (64) в виде

$$[gl \cdot (k-1)]w + [ll \cdot (k-1)] = [lv]. \qquad (65)$$

А последнее нормальное уравнение в это время будет иметь, как известно, вид

$$[gg \cdot (k-1)]w + [gl \cdot (k-1)] = 0.$$

Определяя значение неизвестного w из этого уравнения и подставляя его в уравнение (65), получим

$$-\frac{[gl\cdot(k-1)][gl\cdot(k-1)]}{[gg\cdot(k-1)]}+[ll\cdot(k-1)]=[lv].$$

Но, левая часть полученного равенства может быть обозначена символом $[ll\cdot k]$, вследствие чего равенство примет вид

$$[ll\cdot k]=[lv]. \qquad (66)$$

Объединяя равенства (63) и (66), можно написать

$$[v^2]=[lv]=[ll\cdot k]. \qquad (67)$$

Символ $[ll\cdot k]$ можно раскрывать так, как это сделано в отношении $[fr\cdot 4]$ в выражении (62).

Будем иметь

$$[v^2]=[lv]=[ll]-\frac{[al]\cdot[al]}{[aa]}-\frac{[bl\cdot 1]\cdot[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}-\ldots\ldots- \\ -\frac{[gl\cdot(k-1)][gl\cdot(k-1)]}{[gg\cdot(k-1)]}. \qquad (68)$$

Проверим полученные формулы на случае одного неизвестного, измеренного непосредственно n раз.

В этом случае $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$ и начальные уравнения ошибок будут иметь вид

$$\begin{gathered} x+l_1=v_1 \\ x+l_2=v_2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ x+l_n=v_n, \end{gathered}$$

где $l_1=-q_1$; $l_2=-q_2, \ldots l_n=-q_n$.

Нормальное уравнение в этом случае будет одно, а именно:

$$nx+[l]-0.$$

Отсюда

$$x+-\frac{[l]}{n}\cdot=\frac{[q]}{n}. \qquad (69)$$

Мы пришли к арифметической средине, как и должно быть. Складывая начальные уравнения ошибок и принимая во внимание (69), мы получим

$$[v]=0, \qquad (70)$$

т. е. известное нам свойство вероятнейших ошибок.

Для поверки равенства (63) заменим в нем из начальных уравнений ошибок все l через $(v-x)$.

Будем иметь

$$[(v-x)\cdot v]=[v^2],$$

откуда, вынося во втором члене левой части x за скобки,

$$[v^2]-x[v]=[v^2].$$

А так как, по (70), сумма $[v]=0$, то наше равенство примет вид

$$[v^2]=[v^2],$$

т. е. оно обратилось в тождество.

Переходим к певерке равенства (66). В нашем случае $k=1$ и все a равны единице.

$$[ll\cdot 1]=[ll]-\frac{[l]\cdot[l]}{n}.$$

Пользуясь начальными уравнениями ошибок и формулой (69), написанному выражению можно придать вид

$$[ll\cdot 1]=[(v-x)(v-x)]-nx^2=[(v^2-2xv+x^2)]-nx^2=$$
$$=[v^2]-2x[v]+nx^2-nx^2=[v^2].$$

Таким образом, и здесь мы опять пришли к тождеству.

§ 38. Связь между истинными и вероятнейшими ошибками измерений.

Возьмем снова начальные уравнения ошибок

$$\left.\begin{array}{l} a_1x+b_1y+\ldots\ldots+g_1w+l_1=v_1 \\ a_2x+b_2y+\ldots\ldots+g_2w+l_2=v_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nx+b_ny+\ldots\ldots+g_nw+l_n=v_n \end{array}\right\} \quad (71)$$

Если в этих уравнениях заменить вероятнейшие значения неизвестных их истинными значениями X, Y, .., W, то вероятнейшие ошибки v_1, v_2, .., v_n в правой части уравнений заменятся истинными ошибками измерений Δ_1, Δ_2, .., Δ_n

$$\left.\begin{array}{l} a_1X+b_1Y+\ldots\ldots+g_1W+l_1=\Delta_1 \\ a_2X+b_2Y+\ldots\ldots+g_2W+l_2=\Delta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_nX+b_nY+\ldots\ldots+g_nW+l_n=\Delta_n \end{array}\right\} \quad (72)$$

Вычитая из частей уравнений (71) соответствующие части уравнений (72), будем иметь

$$\begin{array}{l} a_1(x-X)+b_1(y-Y)+\ldots\ldots+g_1(w-W)=v_1-\Delta_1 \\ a_2(x-X)+b_2(y-Y)+\ldots\ldots+g_2(w-W)=v_2-\Delta_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n(x-X)+b_n(y-Y)+\ldots\ldots+g_n(w-W)=v_n-\Delta_n, \end{array}$$

откуда, вводя для краткости обозначения

$$\begin{aligned} x - X &= \alpha \\ y - Y &= \beta \\ &\;. \;. \;. \;. \;. \\ w - W &= \zeta, \end{aligned} \tag{73}$$

получим

$$\left.\begin{aligned} a_1\alpha + b_1\beta + \ldots\ldots + g_1\zeta + \Delta_1 &= v_1 \\ a_2\alpha + b_2\beta + \ldots\ldots + g_2\zeta + \Delta_2 &= v_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots \\ a_n\alpha + b_n\beta + \ldots\ldots + g_n\zeta + \Delta_n &= v_n \end{aligned}\right\} \tag{74}$$

Получилась, взамен начальных уравнений (71), новая эквивалентная система уравнений (74).

Эта новая система уравнений отличается от первоначальной тем, что в ней роль свободных членов играют истинные ошибки измерений. Но уравнения системы (74) обладают всеми свойствами начальных уравнений ошибок и, в частности, свойствами, установленными в предыдущем § 37.

Применяя формулы (67) к системе уравнений (74), получим

$$[v^2] = [\Delta v] = [\Delta\Delta \cdot k] \tag{75}$$

или, по (68)

$$[v^2] = [\Delta v] = [\Delta^2] - \frac{[a\Delta]^2}{[aa]} - \frac{[b\Delta \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} - \frac{[g\Delta \cdot (k-1)]^2}{[gg \cdot (k-1)]}.$$

Вероятнейшие значения неизвестных мы определяем при условии

$$[v^2] = minimum.$$

Отсюда явствует, что всегда должно существовать неравенство

$$[v^2] < [\Delta^2]. \tag{77}$$

Равенство (76), в котором выражения

$$\frac{[a\Delta]^2}{[aa]},\; \frac{[b\Delta \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]}$$

и т. д. суть существенно положительные величины, находится в полном соответствии с основным неравенством (77).

§ 39. Средняя квадратическая ошибка непосредственного измерения.

Согласно принятых нами обозначений $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ представляют собою истинные ошибки непосредственно измеренных равноточных величин $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$.

Если бы эти ошибки нам были известны и если бы число их было достаточно велико, то мы могли бы по ним определить среднюю квадратическую ошибку m отдельного измерения по обычной формуле

$$m = \pm\sqrt{\frac{[\Delta^2]}{n}}. \tag{78}$$

Но, не зная истинных ошибок, мы можем сделать попытку определить величину m при помощи вероятнейших ошибок $v_1, v_2, \dots, v_n$

Для этого воспользуемся установленной в предыдушем параграфе связью между истинными и вероятнейшими ошибками измерений (76).

$$[v^2] = [\Delta^2] - \frac{[a\Delta]^2}{[aa]} - \frac{[b\Delta \cdot 1]^2}{[bb \cdot 1]} - \dots - \frac{[g\Delta \cdot (k-1)]^2}{[gg \cdot (k-1)]}. \quad (79)$$

Если бы число n измеренных величин было неограниченно велико то очевидно, что на основании этих измеренных данных мы получили бы для неизвестных аргументов значения $x, y, \dots, w$ настолько близкие к их истинным значениям $X, Y, \dots W$, что вероятнейшие ошибки $v_1, v_2, \dots v_n$ в этом случае можно было бы считать равными их истинным ошибкам, а это возможно лишь при условии, что члены

$$\frac{[a\Delta]^2}{[aa]}, \quad \frac{[b\Delta, 1]^2}{[bb, 1]}$$

и т. д. порознь равны нулю.

Если число измерений n хотя и не бесконечно велико, но все же достаточно велико, причем, по сравнении с ним, число аргументов k незначительно, то все члены правой части равенства (79) и порознь и вместе можно считать второстепенными по сравнению с первым членом $[\Delta^2]$, который является главным членом. В таком случае второстепенные члены можно заменить с достаточной степенью приближения их средними значениями.

Займемся отысканием этих средних значений

$$\begin{aligned}[a\Delta]^2 &= [a_1\Delta_1 + a_2\Delta_2 + \dots + a_n\Delta_n]^2 = \\ &= (a^2{}_1\Delta^2{}_1 + a^2{}_2\Delta^2{}_2 + \dots + a^2{}_n\Delta^2{}_n) + 2(a_1a_2\Delta_1\Delta_2 + \\ &+ a_1a_3\Delta_1\Delta_3 + \dots + a_{n-1}a_n\Delta_{n-1}\Delta_n). \quad (80)\end{aligned}$$

Предполагая, что нами сделано бесконечно большое число s рядов измерений данных n величин и притом с одинаковой точностью, мы можем для каждого такого ряда написать равенство (80) и затем из левых и правых частей таких s равенств взять среднее арифметическое. Так как коэффициенты $a_1, a_2, \dots, a_n$ во всех этих равенствах одинаковы, то среднее придется брать из квадратов и произведений случайных ошибок. Но мы знаем, что среднее из квадратов бесконечно большого числа случайных ошибок равноточных измерений есть m^2, а среднее из бесконечно большого числа парных произведений случайных ошибок равно нулю

$$\left.\begin{aligned}\frac{[\Delta^2]}{s} &= m^2 \\ \frac{[\Delta_i\Delta_t]}{s} &= 0\end{aligned}\right\} \text{при } s = \infty.$$

Таким образом

$$\substack{\text{Среднее}\\\text{значение}}[a\Delta]^2 = [a^2{}_1m^2 + a^2{}_2m^2 + \dots + a^2{}_nm^2] + 0 = [a^2]\,m^2, \quad (81)$$

а следовательно,

$$\text{Среднее значение}\ \frac{[a\Delta]^2}{[aa]} = m^2. \tag{82}$$

Переходим к следующему члену

$$[b\Delta\cdot 1]^2 = \left([b\Delta] - \frac{[ab]\,[a\Delta]}{[aa]}\right)^2 =$$

$$= [b\Delta]^2 + \frac{[ab]^2\,[a\Delta]^2}{[aa]^2} - 2\,\frac{[ab]}{[aa]}\,[a\Delta]\cdot[b\Delta]. \tag{83}$$

Среднее значение $[a\Delta]^2$ нами найдено. Оно равно по (81) $[a^2]\,m^2$.

Среднее значение $[b\Delta]^2$ найдется аналогичным путем и окажется равным $[b^2]\,m^2$.

Остается определить среднее значение произведения

$$[a\Delta]\cdot[b\Delta]\,.$$

Имеем

$$\begin{gathered}[a\Delta]\cdot[b\Delta] = (a_1\Delta_1 + a_2\Delta_2 + \ldots\ldots + a_n\Delta_n)\cdot(b_1\Delta_1 + \\ + b_2\Delta_2 + \ldots\ldots + b_n\Delta_n) = (a_1b_1\Delta^2{}_1 + \\ + a_2b_2\Delta^2{}_2 + \ldots\ldots + a_nb_n\Delta^2{}_n) + (a_1b_2\Delta_1\Delta_2 + \\ + a_1b_3\Delta_1\Delta_3 + \ldots\ldots + a_nb_{n-1}\Delta_n\Delta_{n-1}).\end{gathered}$$

Рассуждениями, совершенно одинаковыми с вышеприведенными, мы найдем, что

$$\begin{gathered}\text{Среднее значение}\ ([a\Delta]\cdot[b\Delta]) = (a_1b_1m^2 + a_2b_2m^2 + \\ + \ldots\ldots + a_nb_nm^2) = [ab]\cdot m^2.\end{gathered} \tag{84}$$

На основании этого, среднее значение $[b\Delta\cdot 1]^2$ по (83) оказывается равным

$$\text{Среднее значение}\ [b\Delta\cdot 1]^2 = [b^2]\cdot m^2 + \frac{[ab]^2}{[aa]^2}\,[a^2]\cdot m^2 - 2\,\frac{[ab]}{[aa]}\cdot[ab]\cdot m^2$$

или, по преобразовании,

$$\text{Среднее значение}\ [b\Delta\cdot 1]^2 = [bb\cdot 1]\cdot m^2. \tag{85}$$

Отсюда

$$\text{Среднее значение}\ \frac{[b\Delta\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]} = m^2. \tag{86}$$

Точно таким же образом можно убедиться, что и для каждого из остальных членов правой части равенства (79), кроме первого, среднее значение равно m^2. Поэтому, $[v^2]$ можно представить с достаточным приближением в виде

$$[v^2] = [\Delta^2] - m^2 - m^2 - \ldots\ldots - m^2\ (k\ \text{раз}).$$

Так как по (78)

$$[\Delta^2] = nm^2,$$

то

$$[v^2] = n \cdot m^2 - k \cdot m^2 = m^2 (n - k),$$

откуда

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n - k}}. \tag{87}$$

В частном случае одного неизвестного аргумента, т. е. когда $k = 1$, формула (87) принимает известный нам вид

$$m = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{n - 1}}.$$

§ 40. Вес последнего неизвестного.

Для оценки точности уравновешенных по способу наименьших квадратов элементов $x, y, \ldots, w$ необходимо знать вес каждого из них, принимая за единицу веса вес непосредственного измерения.

В этом отношении метод Гаусса имеет чрезвычайно ценное достоинство: при решении этим методом системы нормальных уравнений, вес последнего неизвестного получается попутно. Он равен коэффициенту при последнем неизвестном в последнем уравнении эквивалентной системы.

Докажем это для случая трех неизвестных. Согласно (58) в этом случае

$$z = -\frac{[cl \cdot 2]}{[cc \cdot 2]}. \tag{88}$$

Отсюда видно, что z есть функция измеренных значений $l_1, l_2, \ldots, l_n$, так что можно написать

$$z = \Phi (l_1, l_2, \ldots, l_n). \tag{89}$$

По выведенным в теории ошибок правилам вес величины z можно определить по формуле

$$\frac{1}{P_z} = \frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial l_1}\right)^2}{P_{l_1}} + \frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial l_2}\right)}{P_{l_2}} + \ldots . + \frac{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial l_n}\right)}{P_{l_n}}.$$

Так как в нашем случае все измерения $l_1, l_2, \ldots, l_n$ равноточны, то можно принять

$$P_{l_1} = P_{l_2} = \ldots . = P_{i_n} = 1,$$

после чего написанная формула примет вид

$$\frac{1}{P_z} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial l_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial l_2}\right)^2 + \ldots . + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial l_n}\right)^2,$$

откуда

$$P_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial l_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial l_2}\right)^2 + \ldots . + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial l_n}\right)^2}. \tag{90}$$

Для получения производных раскроем символ $[cl\cdot 2]$ в формуле (88). Будем иметь

$$z=-\frac{1}{[cc\cdot 2]}\left\{[cl]-\frac{[ac]}{[aa]}[al]-\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\left([bl]-\frac{[ab]}{[aa]}[al]\right)\right\}. \qquad (91)$$

Из полученного выражения видно, что z есть линейная функция измеренных величин l_1, l_2, ... l_n.

Найдем теперь производную $\frac{d\varphi}{dl_i}$.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial l_i}=-\frac{1}{[cc\cdot 2]}\left\{c_i-\frac{[ac]}{[aa]}\cdot a_i-\frac{[ba\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\left(b_i-\frac{[ab]}{[aa]}a_i\right)\right\}.$$

Отсюда

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial l_i}\right)^2=\frac{1}{[cc\cdot 2]^2}\left\{\left(c_i-\frac{[ac]}{[aa]}a_i\right)^2+\frac{[bc\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]^2}\left(b_i-\frac{[ab]}{[aa]}a_i\right)^2-\right.$$

$$\left.-2\left(c_i-\frac{[ac]}{[aa]}a_i\right)\cdot\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\left(b_i-\frac{[ab]}{[aa]}a_i\right)\right\},$$

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial l_i}\right)^2=\frac{1}{[cc\cdot 2]^2}\left\{c_i\,c_i+\frac{[ac]^2}{[aa]^2}a_i\,a_i-2\frac{[ac]}{[aa]}a_i\,c_i+\right.$$

$$+\frac{[bc\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]^2}\left(b_i\,b_i+\frac{[ab]^2}{[aa]^2}a_i\,a_i-2\frac{[ab]}{[aa]}a_i\,b_i\right)-$$

$$\left.-2\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\left(b_i\,c_i+\frac{[ab]\,[ac]}{[aa]^2}a_i\,a_i-\frac{[ab]}{[aa]}a_i\,c_i-\frac{[ac]}{[aa]}a_i\,b_i\right)\right\}.$$

Найдя все производные по указанному правилу, возведя их в квадрат и сложив результаты, мы получим

$$\left[\left(\frac{\partial\Phi}{dl_i}\right)^2\right]=\frac{1}{[cc\cdot 2]^2}\left\{[cc]+\frac{[ac]^2}{[aa]^2}[aa]-2\frac{[ac]}{[aa]}[ac]-\right.$$

$$+\frac{[bc\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]^2}\left([bb]+\frac{[ab]^2}{[aa]^2}[aa]-2\frac{[ab]}{[aa]}[ab]\right)-$$

$$\left.-2\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\left([bc]+\frac{[ab]\,[ac]}{[aa]^2}[aa]-\frac{[ab]}{[aa]}[ac]-\frac{[ac]}{[aa]}[ab]\right)\right\}.$$

Постепенно преобразовывая правую часть равенства, будем иметь

$$\left[\left(\frac{\partial\Phi}{\partial l_i}\right)^2\right]=\frac{1}{[cc\cdot 2]^2}\left\{[cc\cdot 1]+\frac{[bc\cdot 1]^2}{[bb\cdot 1]^2}[bb\cdot 1]-2\frac{[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}[bc\cdot 1]\right\}=$$

$$=\frac{1}{[cc\cdot 2]^2}\left\{[cc\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1]\,[bc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\right\}=\frac{1}{[cc\cdot 2]^2}[cc\cdot 2]=\frac{1}{[cc\cdot 2]}.$$

Вследствие этого равенство (90) примет вид

$$P_z=[cc\cdot 2]. \qquad (92)$$

Подобным же образом можно доказать, что и в случае k неизвестных

$$P_w = [gg \cdot (k-1)]. \tag{93}$$

§ 41. Случай уравновешивания посредственных измерений с одним неизвестным.

Пусть неизвестное связано с измеренными равноточными значениями l_1, l_2, ... l_n непосредственно измеренных величин уравнениями

$$\left.\begin{array}{l} a_1 x + l_1 = v_1 \\ a_2 x + l_2 = v_2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_n x + l_n = v_n \end{array}\right\} \tag{94}$$

В этом случуе будем иметь одно нормальное уравнение вида

$$[av]] = 0, \tag{95}$$

которое в раскрытой форме представится в виде

$$[aa]\, x + [al] = 0\,; \tag{96}$$

решая это уравнение, найдем

$$x = -\frac{[al]}{[aa]}. \tag{97}$$

Вес P_x найденного значения X будет

$$P_x = [aa] \tag{98}$$

Средняя ошибка непосредственного измерения представится в виде

$$m = \pm\sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}. \tag{99}$$

Определим вероятнейшее значение x другим путем.

Из формул (94) явствует, что

$$\left.\begin{array}{l} x = -\dfrac{l_1}{a_1} + \dfrac{v_1}{a_1} \\ x = -\dfrac{l_2}{a_2} + \dfrac{v_2}{a_2} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x = -\dfrac{l_n}{a_n} + \dfrac{v_n}{a_n} \end{array}\right\} \tag{100}$$

Следовательно, для x имеется n измеренных значений

$$-\frac{l_1}{a_1}, -\frac{l_2}{a_2}, \ldots\ldots -\frac{l_n}{a_n}. \tag{101}$$

Если веса l_1, $l_2, \ldots, l_n$ будем считать равными единице, то для значений (102) веса будут, по формуле (112) первой части настоящей книги, соответственно

$$p_1 = a_1^2; \quad p_2 = a_2^2; \ldots; p_n = a_n^2,$$

а потому по формуле общей арифметической средины (93) найдем, что

$$x = \frac{a_1^2\left(-\frac{l_1}{a_1}\right) + a_2^2\left(-\frac{l_2}{a_2}\right) + \ldots + a_n^2\left(-\frac{l_n}{a_n}\right)}{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2},$$

или

$$x = -\frac{[al]}{[aa]}. \tag{102}$$

Вес полученного значения X получится по формуле (98)

$$P = p_1 + p_2 + \ldots + p_n,$$

что в данном случае даст

$$P = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 = [aa]. \tag{103}$$

Вероятнейшие значения ошибок в данном случае будут

$$\delta_1 = \frac{v_1}{a_1}$$
$$\delta_2 = \frac{v_2}{a_2}$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\delta_n = \frac{v_n}{a_n},$$

а потому, применяя формулу (106), получим

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[p^2 \cdot \delta^2]}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{\left[a^2 \cdot \left(\frac{v}{a}\right)^2\right]}{n-1}} = \pm\sqrt{\frac{[v^2]}{n-1}}.$$

Таким образом, по способу наименьших квадратов и по принципу арифметической средины мы получили совершенно тождественные результаты.

§ 42. Вес остальных уравновешенных элементов.

Продолжим обследование случая уравновешивания трех неизвестных аргументов.

По исключении неизвестного x мы имели систему уравнений (51).

$$[bb \cdot 1]y + [bc \cdot 1]z + [bl \cdot 1] = 0$$
$$[bc \cdot 1]y + [cc \cdot 1]z + [cl \cdot 1] = 0.$$

Исключая неизвестное y, мы и пришли к уравнению

$$[cc\cdot 2]z+[cl\cdot 2]=0,$$

которое исследовали в предыдущем параграфе.

Но мы можем переставить написанные два уравнения между собою, а в них переставить члены с неизвестными. Будем иметь

$$\begin{aligned}&[cc\cdot 1]z+[bc\cdot 1]y+[cl\cdot 1]=0\\&[bc\cdot 1]z+[bb\cdot 1]y+[bl\cdot 1]=0.\end{aligned}\qquad(104)$$

Написанная система уравнений сохраняет все свойства системы нормальных уравнений.

Определяя из первого уравнения неизвестное z и подставляя найденное его значение во второе уравнение, получим

$$\left([bb\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1]\,[bc\cdot 1]}{[cc\cdot 1]}\right)y+\left([bl\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1]\ [cl\cdot 1]}{[cc\cdot 1]}\right.=0.\quad(105)$$

По доказанному в предыдущем параграфе, мы можем теперь сказать, что коэффициент при y в этом уравнении есть вес неизвестного y, т. е.

$$P_y=[bb\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1]\,[bc\cdot 1]}{[cc\cdot 1]}.\qquad(106)$$

Полученное выражение можно преобразовать,

$$P_y=\frac{[bb\cdot 1]}{[cc\cdot 1]}[cc\cdot 1]-\frac{[bc\cdot 1]\,[bc\cdot 1]}{[cc\cdot 1]}=\frac{[bb\cdot 1]}{[cc\cdot 1]}\cdot[cc\cdot 2],$$

или, по (92),

$$P_y=\frac{[bb\cdot 1]}{[cc\cdot 1]}P_z.\qquad(107)$$

Для определения веса P_x уравновешенного элемента x нужно сделать перестановку уравнений и членов в них с тем, чтобы неизвестное x было последним, и при непременном условии, чтобы система уравнений сохраняла все свойства системы нормальных уравнений.

Уравнения представятся в виде

$$\begin{aligned}&[bb]y+[bc]z+[ab]x+[bl]=0\\&[bc]y+[cc]z+[ac]x+[cl]=0\\&[ab]y+[ac]z+[aa]x+[al]=0.\end{aligned}$$

Решение этой системы уравнений и даст нам в результате вес неизвестного x, как коэффициент при x в последнем уравнении после исключения неизвестных y и z.

Можно перестановку неизвестных и уравнений сделать иначе, а именно

$$[cc]z+[bc]y+[ac]x+[cl]=0$$
$$[bc]z+[bb]y+[ab]x+[al]=0$$
$$[ac]z+[ab]y+[aa]x+[al]=0.$$

И в том и в другом случае уравнения фактически можно и не решать, ограничившись вычислением коэффициентов $[bb\cdot 1]$ и $[cc\cdot 1]$ и применив после этого формулу (97), но в обратном порядке:

$$P_{\substack{\text{последн.}\\ \text{неизв.}}}=\frac{[cc\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}\cdot P_{\substack{\text{предпосл.}\\ \text{неизв.}}}, \qquad (108)$$

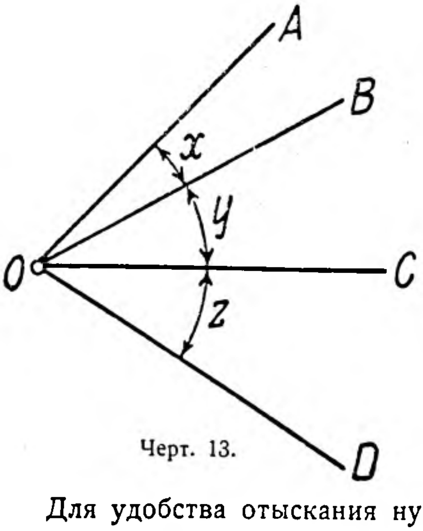
имея в виду, что веса элементов y и z уже известны.

Подобным же образом можно поступать и при определении весов уравновешенных элементов в случае любого числа их.

§ 43. Пример на уравновешивание углов, измеренных по способу Шрейбера.

Имеем шесть равноточных измерений углов, представляющих всевозможные комбинации четырех направлений (черт. 13)

$$\angle AOB=13^\circ\ \ 8'20''$$
$$\angle AOC=38^\circ 17'38''$$
$$\angle BOC=25^\circ\ \ 9'15''$$
$$\angle COD=38^\circ 23'45''$$
$$\angle BOD=63^\circ 33'10''$$
$$\angle AOD=76^\circ 41'27''$$



Черт. 13.

Требуется определить вероятнейшее значение углов x, y и z и оценить точность полученных результатов.

По числу непосредственных измерений составим шесть начальных уравнений ошибок

1) $x-13^\circ\ \ 8'20''=v_1$
2) $x+y-38^\circ 17'38''=v_2$
3) $y-25^\circ\ \ 9'15''=v_3$
4) $z-38^\circ 23'45''=v_4$
5) $y+z-63^\circ 33'10''=v_5$
6) $x+y+z-76^\circ 41'27''=v_6$.

Для удобства отыскания нужных коэффициентов расположим эти уравнения в схеме, а чтобы избавиться от больших свободных членов введем приближенные значения неизвестных, сводя вопрос к отысканию поправок δx, δy и δz. Положим

$$x = 13^\circ\ 8'20'' + \delta x$$
$$y = 25^\circ\ 9'15'' = \delta y$$
$$z = 38^\circ 23'45'' + \delta z$$

Будем иметь такую таблицу коэффициентов начальных уравнений

Коэфф. №№ уравн.	a	b	c	l	v	v^2	lv
1	1	—	—	0	0.00	0.0000	0.00
2	1	1	—	— 3	+ 0.25	0.0625	— 0.75
3	—	1	—	0	+ 3.25	10.5625	0.00
4	—	—	1	0	+ 3.50	12.2500	0.00
5	—	1	1	— 10	— 3.25	10.5625	+ 32.50
6	1	1	1	— 7	— 0.25	0.0625	+ 1.75
						33.5000	+ 33.50

Столбцы, начиная с 6-го, заполняются в последствии.

На основании этой таблицы составляем таблицу коэффициентов нормальных уравнений

Коэфф. №№ уравн.	aa	ab	ac	al	bb	bc	bl	cc	cl
1	1	—	—	—	—	—	—	—	—
2	1	1	—	— 3	1	—	— 3	—	—
3	—	—	—	—	1	—	—	—	—
4	—	—	—	—	—	—	—	1	—
5	—	—	—	—	1	1	— 10	1	— 10
6	1	1	1	— 7	1	1	— 7	1	— 7
Σ	3	2	1	— 10	4	2	— 20	3	— 17

Таким образом, система нормальных уравнений в нашем случае будет

$$\left.\begin{aligned} 3\delta x+2\delta y+\ \delta z-10=0\\ 2\delta x+4\delta y+2\delta z-20=0\\ \delta x+2\delta y+3\delta z-17=0 \end{aligned}\right\} \qquad (110)$$

Эта система уравнений решается весьма просто способом сравнения коэффициентов. Складывая 1-ое и 3-е уравнения и деля в полученном уравнении все члены на 4, найдем

$$\delta x+\delta y+\delta z-6.75=0. \qquad (111)$$

Сокращая все члены 2-го уравнения на 2, получим

$$\delta x+2\delta y+\delta z-10=0. \qquad (112)$$

Из найденных двух уравнений следует, что

$$\delta y=3''.25.$$

Сравнение 1-го из ур-ний (110) с уравнением (112) дает

$$\delta x=0.$$

Сравнение 3-го из ур-ний (110) с уравнением (112) дает

$$\delta z=3''.5.$$

Таким образом, окончательные значения неизвестных по (109) будут

$$\begin{aligned} x&=13^\circ\ \ 8'20''.00\\ y&=25^\circ\ \ 9'18''.25\\ z&=38^\circ 23'48''.50. \end{aligned}$$

Но приведенный способ решения не дает нам данных для оценки той степени доверия, которой заслуживают найденные значения неизвестных.

Решим теперь систему нормальных уравнений (110) методом Гаусса.

Из 1-го уравнения имеем

$$\delta x=-\frac{2}{3}\,\delta y-\frac{1}{3}\,\delta z+\frac{10}{3}. \qquad (113)$$

Подстановка этого значения δx во 2-ое и 3-е уравнения дает

$$\left.\begin{aligned} \frac{8}{3}\,\delta y+\frac{4}{3}\,\delta z-\frac{40}{3}=0\\ \frac{4}{3}\,\delta y+\frac{8}{3}\,\delta z-\frac{41}{3}=0 \end{aligned}\right\} \qquad (114)$$

Мы видим, что полученная система уравнений обладает всеми свойствами системы нормальных уравнений.

Определяем из 1-го уравнения системы (114) неизвестное δy:

$$\delta y = -\frac{1}{2}\delta z + 5. \tag{115}$$

Подстановка найденного значения δy во 2-е уравнение дает

$$2\delta z - 7 = 0 \tag{116}$$

Отсюда

$$\delta z = 3''.5,$$

а из уравнений (115) и (113) получим последовательно

$$\begin{aligned} \delta y &= 3''.25 \\ \delta x &= 0. \end{aligned}$$

Из уравнения (116) непосредственно следует по (102), что

$$P_z = 2.$$

Применяя для определения веса P_y формулу (107), получим

$$P_y = \frac{{}^8/_3}{{}^8/_3} P_z = P_z = 2.$$

Для определения веса P_x переставим уравнения системы (110), с одновременной перестановкой неизвестных.

Получим

$$\begin{aligned} 3\delta z + 2\delta y + \delta x - 17 &= 0 \\ 2\delta z + 4\delta y + 2\delta x - 20 &= 0 \\ \delta z + 2\delta y + 3\delta x - 10 &= 0. \end{aligned}$$

Решая эти уравнения методом Гаусса, мы найдем в результате

$$2\delta x = 0.$$

Отсюда

$$P_x = 2.$$

Найдем P_x иначе, не решая уравнений.

Имеем

$$\begin{aligned} [bb \cdot 1] &= [bb] - \frac{[ab]\,[ab]}{[aa]} = 4 - \frac{4}{3} = \frac{8}{3} \\ [cc \cdot 1] &= [cc] - \frac{[ac]\,[ac]}{[aa]} = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Отсюда по (98)

$$P_x = \frac{[cc \cdot 1]}{[bb \cdot 1]} P_y = P_y = 2.$$

Таким образом, все наши уравновешенные элементы x, y и z являются равноточными с весом, равным 2.

Для определения средней квадратической ошибки непосредственного измерения, (вес его нами принят за единицу), подсчитаем вероятнейшие ошибки (см. таблицу выше) и применим формулу

$$m = \pm \sqrt{\frac{[vv]}{n-k}}.$$

Получим

$$m = \pm \sqrt{\frac{33 \cdot 50}{6-3}} = \pm 3''.3.$$

Для поверки вычисления вероятнейших ошибок применяем тождество (63)

$$[v^2] = [lv]. \tag{117}$$

В нашем случае оно в точности выполняется. Если бы величины неизвестных или ошибок v были вычислены нами с округлениями, то в тождестве (117) левая и правая часть могли бы несколько не совпадать между собою.

§ 44. Обработка посредственных измерений по принципу арифметической средины.

Для определения в нашем примере вероятнейших значений неизвестных можно применить принцип общей арифметической средины, не прибегая непосредственно к способу уравновешивания посредственных измерений.

В самом деле, из данных 6 измерений можно, например, для неизвестного y найти три самостоятельных значения: по третьему измерению, по разности второго и первого и по разности пятого и четвертого, при чем последние два результата будут с весами, равными $^1/_2$.

Таким образом, для y мы будет иметь значения

1) $25^\circ 9' 15''$ с весом $p_1 = 1$
2) $25^\circ 9' 18''$ „ $p_2 = {}^1/_2$
3) $25^\circ 9' 25''$ „ $p_3 = {}^1/_2$

По формуле

$$y_0 = \frac{p_1 y_1 + p_2 p_2 + p_3 y_3}{p_1 + p_2 + p_3}$$

найдем

$$y_0 = 25^\circ 9' 18''.25,$$

при чем вес

$$P_y = p_1 + p_2 + p_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 2.$$

Мы видим, что для y получен тот же результат, что и по способу наименьших квадратов и с тем же весом.

При вычислении y при помощи арифметической средины мы совершенно не использовали 6-е измерение (измерение угла AOD).

Можно для вычисления значения y подыскать и другую комбинацию из данных измерений, а именно, третье измерение и разность между шестым и суммой первого и четвертого измерений. Останутся неиспользованными второе и пятое измерения. Но тогда для y получится 25° 9′ 16″.75, с весом $^1/_3$.

Этот результат менее надежен, так как вес его меньше, чем в первом случае.

Таким образом, способ наименьших квадратов автоматически комбинирует данные результаты измерений так, чтобы из них для каждого неизвестного получить наиболее надежный результат.

§ 45. Контроль составления и решения нормальных уравнений.

В рассмотренном нами примере мы не встретили особых трудностей при отыскании уравновешенных элементов в виду малости числа их и простоты конструкции нормальных уравнений. Но в тех случаях, когда число измеренных данных и самых неизвестных значительно, решение системы нормальных уравнений и даже их составление становится столь громоздким, что является настоятельная нужда в упорядочении расположения самых вычислений по схемам и в организации солидного контроля этих вычислений.

Правда, выведенные нами формулы (67)

$$[v^2] = [lv] = [ll \cdot k],$$

являются отличным средством контроля всех вычислений по уравновешиванию в качестве заключительного аккорда. Но этого недостаточно. Необходимо организовать контроль таким образом, чтобы проверялась каждая строка вычислений, дабы иметь возможность своевременного устранения допущенных промахов.

Таким способом контроля является метод *сумм*.

Сущность его сводится к следующему.

Если мы в начальных уравнениях ошибок

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + g_1 w + l_1 &= v_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + g_2 w + l_2 &= v_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots& \\ a_n x + b_n y + c_n z + \ldots + g_n w + l_n &= v \end{aligned}$$

произведем суммирование в каждом из них коэффициентов и свободных членов, то получим ряд равенств

$$\left.\begin{array}{l} a_1 + b_1 + c_1 + \ldots . + g_1 + l_1 = s_1 \\ a_2 + b_2 + c_2 + \ldots . + g_2 + l_2 = s_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n + b_n + c_n + \ldots . + g_n + l_n = s_n \end{array}\right\} \qquad (118)$$

Произведем умножение членов этих равенств на соответствующие коэффициенты $a_1, a_2, \ldots a_n$ и результаты сложим. Будем иметь

$$[aa] + [ab] + [ac] + \ldots . + [ag] + [al] = [as]. \qquad (119)$$

Подобным же образом мы получим равенства

$$\left.\begin{array}{l} [ab] + [bb] + [bc] + \ldots . + [bg] + [bl] = [bs] \\ [ac] + [bc] + [cc] + \ldots . + [cg] + [cl] = [cs] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ [al] + [bl] + [cl] + \ldots . + [gl] + [ll] = [ls] \end{array}\right\} \qquad (120)$$

Эти тождества показывают, что если иметь суммы $s_1, s_2, \ldots s_n$ и с ними попутно при составлении нормальных уравнений производить те же операции, какие производятся над членами соответствующих начальных уравнений, то получатся количества $[as]$, $[bs]$, ... $[ls]$, которые дадут возможность проверить по формулам (119) и (120) правильность составления нормальных уравнений и добавочного уравнения (64).

Для проверки вычислений при составлении уравнений эквивалентной системы докажем, что

$$[bb \cdot 1] + [bc \cdot 1] + \ldots + [bl \cdot 1] = [bs \cdot 1]. \qquad (121)$$

Имеем

$$[bb \cdot 1] = [bb] - \frac{[ab]\,[ab]}{[aa]}$$

$$[bc \cdot 1] = [bc] - \frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$[bl \cdot 1] = [bl] - \frac{[ab]\,[al]}{[aa]}.$$

Сложение членов этих равенств дает

$$[bb \cdot 1] + [bc \cdot 1] + \ldots . + [bl \cdot 1] =$$

$$= [bs] - [ab] - \frac{[ab]}{[aa]} \cdot \Big([as] - [aa]\Big) =$$

$$= [bs] - [ab] - \frac{[ab]\,[as]}{[aa]} + [ab] = [bs \cdot 1].$$

Точно так же можно установить, что

$$\left.\begin{array}{r}[cc\cdot 2]+[cd\cdot 2]+\ldots.+[cl\cdot 2]=[cs\cdot 2]\\ [dd\cdot 3]+\ldots.+[dl\cdot 3]=[ds\cdot 3]\\ \ldots\ldots\quad\ldots\ldots\ldots\\ [gg\,(k-1)]+[gl\,(k-1)]=[gs\,(k-1)]\\ [ll\cdot k]=[ls\cdot k]\end{array}\right\}\qquad(122)$$

Отсюда видно, что если при решении системы нормальных уравнений над суммами $[as]$, $[bs]$, ... производить надлежащие операции, считая их как бы коэффициентами соответствующих уравнений, то по формулам (122), можно проверить привильность вычисления коэффициентов каждого вновь составленного уравнения.

Последняя из формул (122) может быть объединена с формулой (67), что даст ряд равенств

$$[v^2]=[lv]=[ll\cdot k]=[ls\cdot k].\qquad(123)$$

Этот ряд равенств можно дополнить еще нижеследующим.

Помножим все члены начальных уравнений ошибок на соответствующие суммы s_1, s_2, ... s_n и сложим результаты. Получим уравнение

$$[as]\,x+[bs]\,y+\ldots.+[gs]\,w+[ls]=[vs].\qquad(124)$$

Контрольное равенство для этого уравнения будет

$$[as]+[bs]+\ldots.+[gs]+[ls]=[ss].\qquad(125)$$

Производя последовательную подстановку неизвестных в уравнение (114), мы убедимся приемом, указанным в § 37 в отношении уравнения (64), в существовании равенства

$$[ls\cdot k]=[vs].\qquad(126)$$

Контрольное равенство (125) приведет нас к тождеству

$$[ls\cdot k]=[ss\cdot k].\qquad(127)$$

Объединяя (123), (126) и (127) равенства, мы получим ряд контрольных заключительных соотношений

$$[v^2]=[vl]=[vs]=[ll\cdot k]=[ls\cdot k]=[ss\cdot k].\qquad(128)$$

В некоторых случаях уравновешивания, как мы увидим в дальнейшем, может быть полезным соотношение, которое можно получить из тождеств (128).

Имеем

$$[ll\cdot k]=[ls\cdot k].\qquad(129)$$

ЛИСТ А.

1	$[al]$		$[aa]$		$[ab]$		$[ac]$		$[as]$
2	$\lg[al]$		$\lg[aa]$		$\lg[ab]$		$\lg[ac]$		$\lg[as]$
3	$\lg\frac{[al]}{[aa]}$				$\lg\frac{[ab]}{[aa]}$		$\lg\frac{[ac]}{[aa]}$		$\lg\frac{[as]}{[aa]}$
38	$-\frac{[al]}{[aa]}$	8	$[bl]$		$[bb]$		$[bc]$		$[bs]$
39	$-z\frac{[ac]}{[aa]}$	9	$-\frac{[al][ab]}{[aa]}$		$-\frac{[ab][ab]}{[aa]}$		$-\frac{[ab][ac]}{[aa]}$		$-\frac{[ab][as]}{[aa]}$
40	$-y\frac{[ab]}{[aa]}$	10	$[bl1]$		$[bb1]$		$[bc1]$		$[bs1]$
		11	$\lg[bl1]$		$\lg[bb1]$		$\lg[bc1]$		$\lg[bs1]$
41	$x =$	12	$\lg\frac{[bl1]}{[bb1]}$				$\lg\frac{[bc1]}{[bb1]}$		$\lg\frac{[bs1]}{[bb1]}$
		35	$-\frac{[bl1]}{[bb1]}$	16	$[cl]$		$[cc]$		$[cs]$
		36	$-z\frac{[bc1]}{[bb1]}$	17	$-\frac{[ac][al]}{[aa]}$		$-\frac{[ac][ac]}{[aa]}$		$-\frac{[ac][as]}{[aa]}$
		37	$y =$	18	$-\frac{[bc1][bl1]}{[bb1]}$		$-\frac{[bc1][bc1]}{[bb1]}$		$\frac{[bc1][bs1]}{[bb1]}$
				19	$[cl2]$		$[cc2]$		$[cs2]$
				20	$\lg[cl2]$		$\lg[cc2]$		$\lg[cs2]$
				21	$\lg\frac{[cl2]}{[cc2]}$				$\lg\frac{[cs2]}{[cc2]}$
				34	$z = -\frac{[cl2]}{[cc2]}$	24	$[ll]$		$[ls]$
						25	$-\frac{[al][al]}{[aa]}$		$-\frac{[al]\,as]}{[aa]}$
						26	$-\frac{[bl1][bl1]}{[bb1]}$		$-\frac{[bl1][bs1]}{[bb1]}$
						27	$-\frac{[cl2][cl2]}{[cc2]}$		$-\frac{[cl2][cs2]}{[cc2]}$
						28	$[ll3]$		$[ls3]$
								29	$[ss]$
								30	$-\frac{[as][as]}{[aa]}$
								31	$-\frac{[bs1][bs1]}{[bb1]}$
								32	$-\frac{[cs2][cs2]}{[cc2]}$
								33	$[ss3]$

ЛИСТ *B*.

6 $\lg[al]$ $\lg\frac{[al][al]}{[aa]}$ $\lg\frac{[al][as]}{[aa]}$		4 $\lg[ab]$ $\lg\frac{[ab][al]}{[aa]}$ $\lg\frac{[ab][ab]}{[aa]}$ $\lg\frac{[ab][ac]}{[aa]}$ $\lg\frac{[ab][as]}{[aa]}$	5 $\lg[ac]$ $\lg\frac{[ac][al]}{[aa]}$ $\lg\frac{[ac][ac]}{[aa]}$ $\lg\frac{[ac][as]}{[aa]}$	7 $\lg[as]$ $\lg\frac{[as][as]}{[aa]}$
	14 $\lg[bl1]$ $lg\frac{[bl1][bl1]}{[bb1]}$ $lg\frac{[bl1][bs1]}{[bb1]}$		13 $\lg[bc1]$ $\lg\frac{[bc1][bl1]}{[bb1]}$ $\lg\frac{[bc1][bc1]}{[bb1]}$ $\lg\frac{[bc1][bs1[}{[bb1]}$	15 $\lg[bs1]$ $\lg\frac{[bs1][bs1]}{[bb1]}$
		22 $\lg[cl2]$ $\lg\frac{[cl2][cl2]}{[cc2]}$ $\lg\frac{[cl2][cs2]}{[cc2]}$		23 $\lg[cs2]$ $\lg\frac{[cs2][cs2]}{[cc2]}$

Развернем левую и правую часть равенства в строку по формуле (68)

$$[ll]-\frac{[al][al]}{[aa]}-\frac{[bl\cdot 1][bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}-\ldots\ldots-\frac{[gl(k-1)][gl(k-1)]}{[gg\cdot(k-1)]}=$$

$$=[ls]-\frac{[al][as]}{[aa]}-\frac{[bl\cdot 1][bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}-\ldots\ldots-\frac{[gl(k-1)][gs(k-1)]}{[gg\cdot(k-1)]}.$$

С другой стороны

$$[ls]=[l(a+b+\ldots\ldots+g+l)]=$$

$$=[al]+[bl]+\ldots\ldots+[gl]+[ll].$$

Поэтому, написанное выше равенство можно представить в виде

$$\frac{[al][al]}{[aa]}+\frac{[bl\cdot 1]\,[bl\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}+\ldots\ldots+\frac{[gl(k-1)][gl\cdot(k-1)]}{[gg\cdot(k-1)]}=$$

$$=\frac{[al]\,[as]}{[aa]}+\frac{[bl\cdot 1]\,[bs\cdot 1]}{[bb\cdot 1]}+\ldots\ldots+\frac{[gl\cdot(k-1)][gs\cdot(k-1)]}{[gg\cdot(k-1)]}-$$

$$-\Big([al]+[bl]+\ldots\ldots+[gl]\Big). \qquad (130)$$

§ 46. Схема решения системы нормальных уравнений.

Для придания решению системы нормальных уравнений возможно большего порядка и ясности и для облегчения вычислительных действий, эти вычисления следует располагать в определенной схеме. Одна из таких схем приведена на стр. 112 и 113 для случая трех уравнений, т. е. для системы уравнений

$$
\begin{aligned}
[aa]x + [ab]y + [ac]z + [al] &= 0\\
[ab]x + [bb]y + [bc]z + [bl] &= 0\\
[ac]x + [bc]y + [cc]z + [cl] &= 0.
\end{aligned}
$$

Лист A этой схемы является основным, а на листе B, отдельном от листа A, производятся вспомогательные подсчеты. При этом на листе A вычисления ведутся по горизонтальным строкам, а на вспомогательном листе B — по вертикальным слолбцам. Порядок заполнения строк и столбцов показан цифрами.

Некоторые вычислители предпочитают столбцы, соответствующие свободным членам, помещать не на первом месте, как это сделано в прилагаемой схеме, а на предпоследнем месте. Это не меняет существа дела.

Приведенная схема рассчитана на пользование логарифмическими таблицами (обычно четырехзначными или пятизначными). В настоящее время для вычислений при решении системы нормальных уравнений нередко прибегают к помощи арифмометра.

В этом последнем случае общий вид схемы остается тот же, только она приобретает болеее кампактный вид.

§ 47. Пример на определение постоянных для барометра—анероида.

Даны сравнения показаний барометра—анероида с ртутным барометром (стр. 115).

Для барометра—анероида известна формула

$$B_0 = A + a + b \cdot t + c(760 - A). \qquad (131)$$

Здесь коэффициенты a, b и c неизвестны. Обозначим их через x, y и z и определим их значения по способу наименьших квадратов.

Начальные уравнения ошибок в нашем случае будут иметь вид

$$x + t \cdot y + (760 - A) \cdot z + (A - B_0) = v. \qquad (132)$$

Введем обычные для нас обозначения коэффициентов этих уравнений и свободных членов:

$$
\begin{aligned}
b &= t\\
c &= 760 - A\\
l &= A - B_0.
\end{aligned}
\qquad (133)
$$

№№ по порядку	t (температура)	A_0 (анероид)	B_0 (ртутный баром)
		mm	*mm*
1	$+10^\circ.0\ C$	749.0	744.4
2	$+\ 6.2$	46.1	41.3
3	$+\ 6.3$	56.6	52.7
4	$+\ 5.3$	58.9	54.7
5	$+\ 4.8$	51.7	47.9
6	$+\ 3.8$	57.5	54.0
7	$+17.1$	52.4	47.8
8	$+22.2$	52.5	48.6
9	$+20.8$	52.2	47.7
10	$+21.0$	59.5	55.6

Коэффициент a везде равен 1.

Располагаем начальные уравнения в таблицу, как в § 43, добавляя графу для сумм s. Суммирование по столбцам даст контроль вычислений этих сумм по формуле

$$[a]+[b]+\ldots.+[l]=[s].$$

В результате получим нижеследующую таблицу

Коэффициенты №№ по порядку	a	b	c	l	s
1	1	10.0	11.0	4.6	26.6
2	1	6.2	13.9	4.8	25.9
3	1	6.3	3.4	3.9	14.6
4	1	5.3	1.1	4.2	11.6
5	1	4.8	8.3	3.8	17.9
6	1	3.8	2.5	3.5	10.8
7	1	17.1	7.6	4.6	30.3
8	1	22.2	7.5	3.9	34.6
9	1	20,8	7.8	4.5	34.1
10	1	21.0	0.5	3.9	26.4
$\Sigma =$	10.0	117.5	63.6	41.7	232.8

Вычисление коэффициентов нормальных уравнений производим в таблице, помещенной на стр. 117, уже знакомым нам приемом, но с применением контрольных формул.

На основании результатов вычислений в этой таблице получается такая система трех нормальных уравнений с тремя неизвестными.

$$\begin{aligned} 10\ x + 117{,}5\ y + 63{,}6\ z + 41{,}7 &= 0 \\ 117{,}5x + 1902{,}59y + 741{,}97z + 494{,}87 &= 0 \\ 63{,}6x + 741{,}97y + 577{,}22z + 276{,}75 &= 0. \end{aligned}$$

Решение этих уравнений в схеме приведено ниже на стр. 118 и 119 применительно к общей схеме, данной на стр. 112 и 113.

Из основного листа A на стр. 118 видно, что контроль по формуле

$$[ll \cdot k] = [ls \cdot k]$$

дает вполне согласные результаты; по $[ss \cdot k]$ результат не вполне согласуется с $[ll \cdot k]$ и $[ls \cdot k]$. Это происходит потому, что $[ss \cdot k]$ получена путем алгебраического сложения больших чисел. Это обычно имеет место в отношении $[ss \cdot k]$. Поэтому контроль $[ss \cdot k]$ нередко опускается. В таком случае пропускается и последний столбец ss в таблице коэффициентов нормальных уравнений, а также последний столбец вспомогательного листа B.

В результате вычислений мы найдем, что

$$\begin{aligned} x &= -\overset{mn}{3.625} \\ y &= -0.0100 \\ z &= -0.0671. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$B_0 = A - \overset{mm}{3.625} - 0.0100 \cdot t - 0.0671 \cdot (760 - A).$$

Для определения вероятнейших ошибок v и оценки точности сравнения барометров составляем таблицу (стр. 119 нижняя).

Схождение итогов столбцов v^2 и vl служит контролем вычислений. Кроме того, эти итоги должны сходиться с результатами контрольных заключительных вычислений по схеме.

Для средней квадратической ошибки непосредственного сравнения барометров получим

$$m = \pm \sqrt{\frac{0.8570}{10-3}} = \pm \overset{mm}{0{,}35}.$$

Для оценки точности найденных значений постоянных барометра имеем непосредственно из вычислений

$$P_s = 173.$$

$$P_{,,} = \frac{522}{173} \cdot 173 = 522.$$

ТАБЛИЦА КОЭФФИЦИЕНТОВ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Коэффициэнты / №№ ур—ний	*aa*	*ab*	*ac*	*al*	*as*	*bb*	*bc*	*bl*	*bs*	*cc*	*cl*	*cs*	*ll*	*ls*	*ss*
1	1	10.0	11.0	4.6	26.6	100.00	110.00	46.00	266.00	121.00	50.60	292.60	21.16	122.36	707.56
2	1	6.2	13.9	4.8	25.9	38.44	86.18	29.76	160.58	193.21	66.72	360.01	23.04	124.32	670.81
3	1	6.3	3.4	3.9	14.6	39.69	21.42	24.57	91.98	11.56	13.26	49.64	15.21	56.94	213.16
4	1	5.3	1.1	4.2	11.6	28.09	5.83	22.26	61.48	1.21	4.62	12.76	17.64	48.72	134.56
5	1	4.8	8.3	3.8	17.9	23.04	39.84	18.24	85.92	68.89	31.54	148.57	14.44	68.02	320.41
6	1	3.8	2.5	3.5	10.8	14.44	9.50	13.30	41.04	6.25	8.75	27.00	12.25	37.80	116.64
7	1	17.1	7.6	4.6	30.3	292.41	129.96	78 66	518.13	57.76	34.96	230.28	21.16	139.38	918.09
8	1	22.2	7.5	3.9	34.6	492.84	166.50	86.58	768.12	56.25	29.25	259.50	15.21	134.94	1197.16
9	1	20.8	7.8	4.5	34.1	432.64	162.24	93.60	709.28	60.84	45.10	265.98	20.25	153.45	1162.81
10	1	21.0	0.5	3.9	26.4	441.00	10.50	81.90	554.40	0.25	1.95	13.20	15.21	102.96	696.96
	10.0	117.5	63.6	41.7	232.8	1902.59	741.97	494.87	3256.93	577.22	276.75	1659.54	175.57	988.89	6138.16

ОСНОВНОЙ ЛИСТ А.

41.7	10	117.5	63.6	232.8
1.62014	1.00000	2.07004	1.80346	2.36698
0.62014		1.07004	0.80346	1.36698
— 4.17	494.87	1902.59	741.97	3256.93
— 6.36.z = + 0.427	— 489.98	— 1380.62	— 747.30	— 2735.40
— 11.75 y = + 0.118	4.89	521.97	— 5.33	521.53
	0.68931	2.717.65	0.72673n	2.71728
x = — 3.625	7.97166		8.00908n	9.99963
	— 0.00937	276.75	577.22	1659.54
	0.0102.z = 0.00066	— 265.21	404.50	— 1480.61
	y = — 0.0100	+ 0.05	— 0.05	+ 5.33
		11.59	172.67	184.26
		1.06408	2.23722	2.26543
		8.82686		0.02821
		z = — 0.0671	175.57	988.89
			— 173.89	— 970.78
			— 0.05	— 4.89
			— 0.78	— 12.36
			0.85	0.86
				6138.16
				— 5419.50
				— 521.09
				— 196.63
				0.96

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЙ ЛИСТ В.

1.62014 2.24028 2.98712		2.07004 2.69018 3.14008 2.87350 3.43702	1.80346 2.42360 2.60692 3.17044	2.36698 3.73396
	0.68931 8.66097 0.68894		0.72673 8.69839 8.73581 0.72636	2.71228 2.71191
		1.06408 9.89092 1.09229		2.26543 2.29364

№№ по порядку	ax	by	cz	l	v	v^2	lv
1	— 3.625	— 0.100	— 0.737	+ 4.6	+ 0.14	0.0196	+ 0.644
2	„	— 0.062	— 0.931	+ 4.8	+ 0.18	0.0324	+ 0.864
3	„	— 0.063	— 0.228	+ 3.9	— 0.02	0.0004	— 0.078
4	„	— 0.053	— 0.074	+ 4.2	+ 0.45	0.2025	+ 1.890
5	„	— 0.048	— 0.556	+ 3.8	— 0.43	0.1849	— 1.634
6	„	— 0.038	— 0.168	+ 3.5	— 0.33	0.1089	— 1.155
7	„	— 0.171	— 0.509	+ 4.6	+ 0.29	0.0841	+ 1.334
8	„	— 0.222	— 0.502	+ 3.9	— 0.45	0.2025	— 1.755
9	„	— 0.208	— 0.523	+ 4.5	+ 0.14	0.0196	+ 0.630
10	„	— 0.210	— 0.034	+ 3.9	+ 0.03	0.0009	+ 0.117
					Σ	0.8558	+ 0.857

Отыскивание веса P_x производим после соответствующей перестановки нормальных уравнений.

Получим

$$P_x = 1{,}72.$$

§ 48. Оценка точности результатов уравновешивания при неравноточных посредственных измерениях.

В § 35 мы установили, что в случае неравноточных посредственных измерений можно представить начальные уравнения ошибок в виде

$$\begin{gathered} a'_1x + b'_1y + \ldots + g'_1w + l'_1 = v'_1 \\ a'_2x + b'_2y + \ldots + g'_2w + l'_2 = v'_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_nx + b'_ny + \ldots + g'_nw + l'_n = v'_n, \end{gathered}$$

где

$$\left.\begin{array}{ll} a'_1 = a_1\sqrt{p_1}; & a'_2 = a_2\sqrt{p_2}; \ldots \\ b'_1 = b_1\sqrt{p_1}; & b'_2 = b_2\sqrt{p_2}; \ldots \\ \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ l'_1 = l_1\sqrt{p_1}; & l'_2 = l_2\sqrt{p_2}; \ldots \\ v'_1 = v_1\sqrt{p_1}; & v'_2 = v_2\sqrt{p_2}; \ldots \end{array}\right\} \qquad (134)$$

Таким преобразованием дело сводится не только по форме, но и по существу к уравновешиванию равноточных измерений, так как l'_1, l_2, ... l'_n все имеют одинаковый вес, равный единице.

Для средней квадратической ошибки единицы веса будем иметь формулу

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[v'^2]}{n-k}},$$

которую на основании обозначений (134) можно представить в виде

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}}. \qquad (135)$$

Вес последнего неизвестного будет равен

$$P_w = [g'g' \cdot (k-1)],$$

или по (134)

$$P_w = [pgg \cdot (k-1)]. \qquad (136)$$

Таким же образом изменятся и другие выведенные нами ранее соотношения.

Заключительные контрольные формулы примут вид

$$[pv^2] = [pvl] = [pvs] = [pll \cdot k] = [pls \cdot k] = [pss \cdot k]. \qquad (137)$$

В практическом отношении, в случае неравноточных измерений, порядок уравновешивания, схемы, контроль,—все остается в том виде, как это изложено выше для случая равноточных измерений.

§ 49. Вес функции уравновешенных элементов.

Имеем функцию уравновешенных элементов

$$u = \psi(x,\ y, \ldots .\ w) \tag{138}$$

Требуется определить вес вычисленного значения этой функции. Какого бы вида ни была функция u,—ее всегда можно перевести путем дифференцирования на линейную, введением приближенных значений уравновешенных элементов.

Будем иметь

$$du = \frac{\partial\psi}{\partial x}dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}dy + \ldots . + \frac{\partial\psi}{\partial w}dw. \tag{139}$$

Для решения вопроса можно определить из равенства (139) какое-нибудь из неизвестных, подставить это значение в начальные уравнения ошибок, в которых неизвестные также заменены их поправками, и по приведении членов расположить их так, чтобы du был последним неизвестным.

Составляя теперь по начальным уравнениям систему нормальных уравнений и решив эту систему по методу Гаусса, мы найдем непосредственно вес du, как вес последнего неизвестного.

Такой способ решения вопроса особенно удобен тогда, когда главной задачей уравновешивания является именно отыскание по данным измерениям вероятнейшего значения функции u и ее веса.

В тех случаях, когда требуется отыскать вес нескольких функций, или когда вообще задача уравновешивания является сложной в виду значительного числа неизвестных аргументов,—вопрос о весах этих аргументов и их функций решается при помощи так называемых весовых коэффициентов.

§ 50. Определение весов уравновешенных элементов при помощи весовых коэффициентов способом неопределенных множителей.

Для ознакомления с идеей способа весовых коэффициентов и применением его к целям практики, рассмотрим случай четырех неизвестных при неравноточных измерениях.

Имеем систему нормальных уравнений

$$\left.\begin{array}{l}
[paa]x + [pab]y + [pac]z + [pad]t + [pal] = 0 \\
[pab]x + [pbb]y + [pbc]z + [pbd]t + [pbl] = 0 \\
[pac]x + [pbc]y + [pcc]z + [pcd]t + [pcl] = 0 \\
[pad]x + [pbd]y + [pcd]z + [pdd]t + [pdl] = 0.
\end{array}\right\} \tag{140}$$

Эквивалентная этой системе уравнений, при решении по методу Гаусса, будет

$$\left.\begin{array}{rl|l}
x+\frac{[pab]}{[paa]}y+\frac{[pac]}{[paa]}z+\frac{[pad]}{[paa]}t+\frac{[pal]}{[paa]} & =0 & 1\\
y+\frac{[pbc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}z+\frac{[pbd\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}t+\frac{[pbl\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]} & =0 & A_1, 1\\
z+\frac{[pcd\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}t+\frac{[pcl\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]} & =0 & A_2, B_2, 1\\
t+\frac{[pdl\cdot 3]}{[pdd\cdot 3]} & =0 & A_3, B_3, C_3.
\end{array}\right. \qquad (141)$$

Помножим члены новой системы уравнений соответственно на 1, A_1, A_2 и A_3 и сложим. При чем количества A_1, A_2 A_3 подберем так, чтобы в результате коэффициенты при y, z и t обратились в нуль.

Получим

$$x+\frac{[pal]}{[paa[}+\frac{[pbl\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}A_1+\frac{[pcl\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}A_2+\frac{[pdl\cdot 3]}{[pdd\cdot 3]}A_3=0, \quad (142)$$

а условия неопределенных множителей будут

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{[pab]}{[paa]}+A_1=0\\
\frac{[pac]}{[paa]}+\frac{[pbc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}A_1+A_2=0\\
\frac{[pad]}{[paa]}+\frac{[pbd\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}A_1+\frac{[pcd\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}A_2+A_3=0.
\end{array}\right\} \quad (143)$$

Из уравнений (143) видно, что они уже решены относительно неизвестных множителей A_1, A_2 и A_3, при чем все коэффициенты и свободные члены этих уравнений нам уже известны попутно, из решения нормальных уравнений методом Гаусса.

Зная множители A_1, A_2 и A_3, мы можем из уравнения (142) определить неизвестное x, что будет служить поверкой вычисления этих множителей, так как уравновешенное значение x нам уже известно из решения нормальных уравнений.

Если мы помножим члены второго, третьего и четвертого уравнения системы (141) соответственно на 1, B_2, B_3 и наложим условие, чтобы при сложении членов всех уравнений коэффициенты при неизвестных z и t обратились в нуль, то получим уравнение

$$y+\frac{[pbl\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}+\frac{[pcl\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}B_2+\frac{[pbl\cdot 3]}{[pdd\cdot 3]}B_3=0 \quad (144)$$

и условия

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{[pbc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}+B_2=0\\
\frac{[pbd\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}+\frac{[pcd\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}B_2+B_3=0.
\end{array}\right\} \quad (145)$$

Мы видим, что множители B_2 и B_3 определяются из уравнений (145) так же легко, как и множители A_1, A_2 и A_3, что для определения их все данные у нас уже имеются.

Уравнение (144) служит контрольным.

Помножим члены третьего и четвертого уравнения на 1 и C_3 и сложим, наложив условие, чтобы коэффициент при неизвестном t обратился в нуль. Будем иметь

$$z+\frac{[pcl\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}+\frac{[pdl\cdot 3]}{[pdd\cdot 3]}C_3=0 \tag{146}$$

и

$$\frac{[pcd\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}+C_3=0. \tag{147}$$

Применим теперь множители A_1, A_2, A_3, B_2, B_3 и C_3 к отыскиванию весов уравношенных элементов.

Так как уравновешенные элементы x, y, z, t суть линейные функции измеренных значений l_1, l_2, ... l_n, то мы можем представить их в виде

$$\left.\begin{aligned} x&=\alpha_1 l_1+\alpha_2 l_2+\dots\dots+\alpha_n l_n=[\alpha l]\\ y&=\beta_1 l_1+\beta_2 l_2+\dots\dots+\beta_n l_n=[\beta l]\\ z&=\gamma_1 l_1+\gamma_2 l_2+\dots\dots+\gamma_n l_n=[\gamma l]\\ t&=\delta_1 l_1+\delta_2 l_2+\dots\dots+\delta_n l_n=[\delta l].\end{aligned}\right\} \tag{148}$$

По известной нам из теории ошибок формуле (116) мы можем написать, что

$$\frac{1}{P_x}=\frac{\alpha_1^2}{p_1}+\frac{\alpha_2^2}{p_2}+\dots\dots+\frac{\alpha_n^2}{p_n}=\left[\frac{\alpha^2}{p}\right]=\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right].$$

Подобные же соотношения можно написать для весов остальных неизвестных, так что в общем мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{P_x}&=\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]\\ \frac{1}{P_y}&=\left[\frac{\beta\beta}{p}\right]\\ \frac{1}{P_z}&=\left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right]\\ \frac{1}{P_t}&=\left[\frac{\delta\delta}{p}\right].\end{aligned}\right\} \tag{149}$$

Суммы

$$\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right],\ \left[\frac{\beta\beta}{p}\right],\ \left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right],\ \left[\frac{\delta\delta}{p}\right]$$

называются *квадратными весовыми коэффициентами.*

Для определения величины этих коэффициентов помножим члены нормальных уравнений (140) соответственно на неопределенные множители $Q_{1,1}$, $Q_{1,2}$, $Q_{1,3}$ и $Q_{1,4}$ и сложим их, наложив условия, чтобы коэффициент при x был равен 1, а коэффициенты при остальных неизвестных оказались равными нулю. Получим

$$x = -[pal]\,Q_{1,1} - [pbl]\,Q_{1,2} - [pcl]\,Q_{1,3} - [pdl]\,Q_{1,4} \qquad (150)$$

Условия составят систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &[paa]\,Q_{1,1} + [pab]\,Q_{1,2} + [pac]\,Q_{1,3} + [pad]\,Q_{1,4} - 1 = 0 \\ &[pab]\,Q_{1,1} + [pbb]\,Q_{1,2} + [pbc]\,Q_{1,3} + [pbd]\,Q_{1,4} \qquad = 0 \\ &[pac]\,Q_{1,1} + [pbc]\,Q_{1,2} + [pcc]\,Q_{1,3} + [pcd]\,Q_{1,4} \qquad = 0 \\ &[pad]\,Q_{1,1} + [pdb]\,Q_{1,2} + [pcd]\,Q_{1,3} + [pdd]\,Q_{1,4} \qquad = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (151)$$

Полученная система уравнений отличается от системы нормальных уравнений (140) только тем, что в ней

$$[pbl] = -1;\quad [pbl] = 0;\quad [pcl] = 0;\quad [pdl] = 0. \qquad (152)$$

Поэтому очевидно, что для новой системы уравнений (151) коэффициенты A_1, A_2 и A_3 будут те же самые, т. е. они будут определяться уравнениями (143)

$$A_1 = -\frac{[pab]}{[paa]} \qquad (153)$$

$$A_2 = -\frac{[pac]}{[paa]} - \frac{[pbc\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}A_1 \qquad (154)$$

$$A_3 = -\frac{[pad]}{[paa]} - \frac{[pbd\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}A_1 - \frac{[pcd\cdot 2]}{[pcc\cdot 2]}A_2. \qquad (155)$$

Для определения неизвестных $Q_{1,1}$, $Q_{1,2}$, $Q_{1,3}$ и $Q_{1,4}$ нужно определить и в формулы (142), (143), (146) и последнюю из (141), подставить значения $[pal]$, $[pbl\cdot 1]$, $[pcl\cdot 2]$ и $[pdl\cdot 3]$.

Имеем из (152), что

$$[pal] = -1. \qquad (156)$$

Далее мы знаем, что

$$[pbl\cdot 1] = [pbl] - \frac{[pab]}{[paa]}\cdot[pal],$$

что согласно (152) и (153) по преобразовании дает

$$[pbl\cdot 1] = -A_1. \qquad (157)$$

Мы знаем, что

$$[pcl\cdot 2] = [pcl\cdot 1] - \frac{[pbc\cdot 1]\,[pbl\cdot 1]}{[pbb\cdot 1]}.$$

Но по (157)

$$[pbl\cdot 1] = -A_1.$$

Кроме того, аналогичным путем можно убедиться, что

$$[pcl \cdot 1] = \frac{[pac]}{[paa]},$$

а потому можем написать, что

$$[pcl \cdot 2] = \frac{[pac]}{[paa]} + \frac{[pbc \cdot 1]}{[pbb \cdot 1]} A_1,$$

или, согласно (144),

$$[pcl \cdot 2] = -A_2. \tag{158}$$

Таким же путем докажем, что

$$[pdl \cdot 3] = -A_3. \tag{159}$$

Подстановка найденных значений в формулы для неизвестных приведет нас к таким результатам

$$\left.\begin{aligned}
Q_{1,1} &= \frac{1}{[paa]} + \frac{A_1^2}{[pbb \cdot 1]} + \frac{A_2^2}{[pcc \cdot 2]} + \frac{A_3^2}{[pdd \cdot 3]} \\
Q_{1,2} &= \qquad\qquad \frac{A_1}{[pbb \cdot 1]} + \frac{A_2 \cdot B_2}{[pcc \cdot 2]} + \frac{A_3 \cdot B_3}{[pdd \cdot 3]} \\
Q_{1,3} &= \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{A_2}{[pcc \cdot 2]} + \frac{A_3 \cdot C_3}{[pdd \cdot 3]} \\
Q_{1,4} &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \frac{A_3}{[pdd \cdot 3]}.
\end{aligned}\right\} \tag{160}$$

Обратимся теперь к уравнению (150).

Раскрытие в нем квадратных скобок и подбор членов дает:

$$\begin{aligned}
x = &-(p_1a_1Q_{1,1} + p_1b_1Q_{1,2} + p_1c_1Q_{1,3} + p_1d_1Q_{1,4})\, l_1 - \\
&-(p_2a_2Q_{1,1} + p_2b_2Q_{1,2} + p_2c_2Q_{1,3} + p_2d_2Q_{1,4})\, l_2 - \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&-(p_na_nQ_{1,1} + p_nb_nQ_{1,2} + p_nc_nQ_{1,3} + p_nd_nQ_{1,4})\, l_n.
\end{aligned}$$

Сопоставление этой формулы с первой из (148) приводит к выводу, что

$$\left.\begin{aligned}
-\alpha_1 &= p_1a_1Q_{1,1} + p_1b_1Q_{1,2} + p_1c_1Q_{1,3} + p_1d_1Q_{1,4} \\
-\alpha_2 &= p_2a_2Q_{1,1} + p_2b_2Q_{1,2} + p_2c_2Q_{1,3} + p_2d_2Q_{1,4} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
-\alpha_n &= p_na_nQ_{1,1} + p_nb_nQ_{1,2} + p_nc_nQ_{1,3} + p_nd_nQ_{1,4}
\end{aligned}\right\} \tag{161}$$

Составим теперь с помощью этих значений α выражение для весового коэффициента $\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right]$.

Будем иметь

$$\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] = Q_{1,1}([paa]\,Q_{1,1}+[pab]\,Q_{1,2}+[pac]\,Q_{1,3}+[pad]\,Q_{1,4})+$$
$$+Q_{1,2}([pab]Q_{1,1}+[pbb]\,Q_{1,2}+[pbc]\,Q_{1,3}+[pbd]\,Q_{1,4})+$$
$$+Q_{1,3}([pac]\,Q_{1,1}+[pbc]\,Q_{1,2}+[pcc]\,Q_{1,3}+[pcd]\,Q_{1,4})+$$
$$+Q_{1,4}([pad]\,Q_{1,1}+pbd]\,Q_{1,2}+[pcd]\,Q_{1,3}+[pdd]\,Q_{1,4}).$$

Принимая во внимание условия (151), получим

$$\left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] = Q_{1,1}. \tag{162}$$

Если мы помножим члены нормальных уравнений на неопределенных множителей $Q_{2,1}$, $Q_{2,2}$, $Q_{2,3}$, $Q_{2,4}$, наложив на них условия, чтобы при сложении левых и правых частей нормальных уравнений коэффициент при y обратился в единицу, а коэффициенты при остальных неизвестных—в нули, то будем иметь подобно предыдущему

$$y = -[pal]\,Q_{2,1}-[pbl]\,Q_{2,2}-[pcl]\,Q_{2,3}-[pdl]\,Q_{2,4}. \tag{163}$$

Условия составят систему уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&[paa]\,Q_{2,1}+[pab]\,Q_{2,2}+[pac]\,Q_{2,3}+[pad]\,Q_{2,4} &&=0\\
&[pab]\,Q_{2,1}+[pbb]\,Q_{2,2}+[pbc]\,Q_{2,3}+[pbd]\,Q_{2,4}-1 &&=0\\
&[pac]\,Q_{2,1}+[pbc]\,Q_{2,2}+[pcc]\,Q_{2,3}+[pcd]\,Q_{2,4} &&=0\\
&[pad]\,Q_{2,1}+[pbd]\,Q_{2,2}+[pcd]\,Q_{2,3}+[pdd]\,Q_{2,4} &&=0.
\end{aligned}\right\} \tag{164}$$

Решение этих уравнений относительно неизвестных множителей $Q_{2,1}$, $Q_{2,2}$, $Q_{2,3}$, $Q_{2,4}$ приведет нас к формулам

$$\left.\begin{aligned}
Q_{2,2} &= \frac{1}{[pbb\cdot 1]}+\frac{B_2^{\,2}}{[pcc\cdot 2]}+\frac{B_3^{\,2}}{[pdd\cdot 3]}\\
Q_{2,3} &= \frac{B_2}{[pcc\cdot 2]}+\frac{B_3\cdot C_3}{[pdd\cdot 3]}\\
Q_{2,4} &= \frac{B_3}{[pdd\cdot 3]}
\end{aligned}\right\} \tag{165}$$

По раскрытии квадратных скобок уравнения (163) и подборе членов по величинам l, будем иметь

$$y = -(p_1a_1Q_{2,1}+p_1b_1Q_{2,2}+p_1c_1Q_{2,3}+p_1d_1Q_{2,4})\,l_1-$$
$$-(p_2a_2Q_{2,1}+p_2b_2Q_{2,2}+p_2c_2Q_{2,3}+p_2d_2Q_{2,4})\,l_2-$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$-(p_na_nQ_{2,1}+p_nb_nQ_{2,2}+p_nc_nQ_{2,3}+p_2d_2Q_{2,4})\,l_n.$$

Сопоставление этого уравнения со вторым из уравнений (148)

$$y = \beta_1l_1+\beta_2l_2+\ldots\ldots+\beta_nl_n$$

дает

$$\left.\begin{array}{l} -\beta_1 = p_1a_1Q_{2,1} + p_1b_1Q_{2,2} + p_1c_1Q_{2,3} + p_1d_1Q_{2,4} \\ -\beta_2 = p_2a_2Q_{2,1} + p_2b_2Q_{2,2} + p_2c_2Q_{2,3} + p_2d_2Q_{2,4} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -\beta_n = p_na_nQ_{2,1} + p_nb_nQ_{2,2} + p_nc_nQ_{2,3} + p_nd_nQ_{2,4} \end{array}\right\} \quad (166)$$

Определяя отсюда величину весового коэффициента $\left[\frac{\beta\beta}{p}\right]$ мы найдем, что

$$\left[\frac{\beta\beta}{p}\right] = Q_{2,2}. \quad (167)$$

Совершенно также мы найдем, введя неопределенные множители, $Q_{3,1}$ $Q_{3,2}$ $Q_{3,3}$ $Q_{3,4}$, что

$$\left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right] = Q_{3,3}, \quad (168)$$

причем

$$\left.\begin{array}{l} Q_{3,3} = \dfrac{1}{[pcc\cdot 2]} + \dfrac{C_3^{\,2}}{[pdd\cdot 3]} \\ Q_{3,4} = \dfrac{C_3}{[pdd\cdot 3]} \end{array}\right\} \quad (169)$$

Наконец, при помощи неопределенных множителей $Q_{4,1}$, $Q_{4,2}$ $Q_{4,3}$, $Q_{4,4}$ мы найдем, что

$$\left[\frac{\delta\delta}{p}\right] = Q_{4,4} = \frac{1}{[pdd\cdot 3]}. \quad (170)$$

Собирая вместе все вышеустановленное, будем иметь

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{P_x} = \left[\dfrac{\alpha\alpha}{p}\right] = Q_{1,1} = \dfrac{1}{[paa]} + \dfrac{A_1^{\,2}}{[pbb\cdot 1]} + \dfrac{A_2^{\,2}}{[pcc\cdot 2]} + \dfrac{A_3^{\,2}}{[pdd\cdot 3]} \\ \dfrac{1}{P_y} = \left[\dfrac{\beta\beta}{p}\right] = Q_{2,2} = \dfrac{1}{[pbb\cdot 1]} + \dfrac{B_2^{\,2}}{[pcc\cdot 2]} + \dfrac{C_3^{\,2}}{[pdd\cdot 3]} \\ \dfrac{1}{P_z} = \left[\dfrac{\gamma\gamma}{p}\right] = Q_{3,3} = \dfrac{1}{[pcc\cdot 2]} + \dfrac{C_3^{\,2}}{[pdd\cdot 3]} \\ \dfrac{1}{P_t} = \left[\dfrac{\delta\delta}{p}\right] = Q_{4,4} = \dfrac{1}{[pdd\cdot 3]} \end{array}\right\} \quad (171)$$

Из приведенных рассуждений видно, что неопределенные множители Q со значками нам нужны были лишь для вывода формул. Фактически же, веса неизвестных определяются при помощи множителей A. B и C.

Последняя из формул (171) показывает, что

$$P_t = [pdd\cdot 3],$$

что вполне подтверждает выведенное нами ранее правило относительно веса последнего неизвестного.

Применим выведенные формулы к разобранному нами в § 47 примеру. Пользуясь числовыми данными, полученными в этом примере для отыскания значений неизвестных, мы для множителей A и B будем иметь, согласно (143), (145) и (147), уравнения

$$\begin{aligned} &11{,}75 + A_1 = 0 \\ &6{,}36 - 0{,}0102 \cdot A_1 + A_2 = 0 \\ &-0{,}0102 + B_2 = 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} A_1 &= -11{,}75 \\ A_2 &= -\ \ 6{,}48 \\ B_2 &= +\ \ 0{,}0102. \end{aligned}$$

Для значений неизвестных x, y и z имеем

$$\begin{aligned} &z = -0{,}0671 \\ &y = -0{,}00937 - 0{,}00067 = -0{,}0100 \\ &x = -4{,}17 + 0{,}110 + 0{,}435 = -3{,}625. \end{aligned}$$

Получим те же результаты, что и раньше.

Для весов неизвестных получим

$$P_z = [cc \cdot 2] = 173$$

$$\frac{1}{P_y} = \frac{1}{522} + \frac{0{,}01^2}{173} = \frac{1}{522};\ P_y = 522$$

$$\frac{1}{P_x} = \frac{1}{10} + \frac{138{,}06}{522} + \frac{41{,}99}{173} = 0{,}607;\ P_x = 1{,}7.$$

§ 51. Определение веса функции уравновешенных элементов при помощи весовых коэффициентов.

Имеем функцию'

$$u = \varphi(x, y, z, t),$$

или по дифференцировании

$$du = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z} dz + \frac{\partial\varphi}{\partial t} dt. \tag{172}$$

Дифференцирование равенств (138) дает

$$\begin{aligned} dx &= \alpha_1 dl_1 + \alpha_2 dl_2 + \ldots . + \alpha_n dl_n \\ dy &= \beta_1 dl_1 + \beta_2 dl_2 + \ldots . + \beta_n dl_n \\ dz &= \gamma_1 dl_1 + \gamma_2 dl_2 + \ldots . + \gamma_n al_n \\ dt &= \delta_1 dl_1 + \delta_2 dl_2 + \ldots . + \delta_n dl_n. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения дифференциалов dx, dy, dz и dt в формулу (172) и располагая члены по dl_1, $dl_2, \ldots$, получим

$$du = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\alpha_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\beta_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\gamma_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\delta_1\right)dl_1 +$$
$$+ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\alpha_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\beta_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\gamma_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\delta_2\right)dl_2 + \ldots +$$
$$+ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\alpha_n + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\beta_n + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\gamma_n + \frac{\partial\varphi}{\partial t}\delta_n\right)dl_n.$$

Переходим теперь к определению средней квадратической ошибки m_u по формуле (66) теории ошибок. Для этого нужно коэффициент при каждом dl возвести в квадрат и помножить на квадрат средней квадратической ошибки соответствующей величины l.

Зная, что

$$m_{l_1} = \frac{\mu}{\sqrt{p_1}},\ m_{l_2} = \frac{\mu}{\sqrt{p_2}}, \ldots .\ m_{l_n} = \frac{\mu}{\sqrt{p_n}},$$

мы, после подбора членов по производным будем иметь

$$m_u^2 = \mu^2 \cdot \left\{ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 \cdot \left[\frac{\alpha\alpha}{p}\right] + 2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y}\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] + 2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right] + \right.$$
$$+ 2\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}\left[\frac{\alpha\delta}{p}\right] +$$
$$+ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 \cdot \left[\frac{\beta\beta}{p}\right] + 2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}\left[\frac{\beta\gamma}{p}\right] + 2\frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}\left[\frac{\beta\delta}{p}\right] +$$
$$+ \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 \cdot \left[\frac{\gamma\gamma}{p}\right] + 2\frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t}\left[\frac{\gamma\delta}{p}\right] +$$
$$\left. + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 \left[\frac{\delta\delta}{p}\right] \right\}. \tag{173}$$

В фигурных скобках мы имеем квадратные весовые коэффициенты, значения которых нам уже известны, и *неквадратные весовые коэффициенты*

$$\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right], \left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right], \ldots \left[\frac{\gamma\delta}{p}\right],$$

значения которых нам предстоит определить. Для определения величины

$$\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right]$$

возьмем два ряда равенств (151) и (156), произведем перемножения всех α на соответствующие β, каждое произведение разделим на свой вес и результаты сложим. Если при этом мы будем располагать члены по величинам $Q_{1,1}$, $Q_{1,2}$, $Q_{1,3}$, $Q_{1,4}$, то получим

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] = Q_{1,1}\cdot\{[paa]\,Q_{2,1}+[pab]\,Q_{2,2}+[pac]\,Q_{2,3}+[pad]\,Q_{2,4}\}+\\ +Q_{1,2}\cdot\{[pab]\,Q_{2,1}+[pbc]\,Q_{2,2}+[pbc]\,Q_{2,3}+[pbd]\,Q_{2,4}\}+\\ +Q_{1,3}\cdot\{[pac]\,Q_{2,1}+[pbc]\,Q_{2,2}+[pcc]\,Q_{2,3}+[pcd]\,Q_{2,4}\}+\\ +Q_{1,4}\cdot\{[pad]\,Q_{2,1}+[pbd]\,Q_{2,2}+[pcd]\,Q_{2,3}+[pdd]\,Q_{2,4}\}.\end{aligned}\right\} \quad (174)$$

Располагая те же члены по $Q_{2,1}$, $Q_{2,2}$, $Q_{2,3}$, $Q_{2,4}$, будем иметь

$$\left.\begin{aligned}\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] = Q_{2,1}\{[paa]\,Q_{1,2}+[pab]\,Q_{1,2}+[pac]\,Q_{1,3}+[pad]\,Q_{1,4}\}+\\ +Q_{2,2}\{[pab]\,Q_{1,1}+[pbb]\,Q_{1,2}+[pbc]\,Q_{1,3}+[pbd]\,Q_{1,4}\}+\\ +Q_{2,3}\{[pac]\,Q_{1,1}+[pbc]\,Q_{1,2}+[pcc]\,Q_{1,3}+[dcd]\,Q_{1,4}\}+\\ +Q_{2,4}\{[pad]\,Q_{1,1}+[pbd]\,Q_{1,2}+[pcd]\,Q_{1,3}+[pdd]\,Q_{1,4}\}.\end{aligned}\right\} \quad (175)$$

На основании равенств (154) формула (164) примет вид

$$\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] = Q_{1,2}, \quad (176)$$

а на основании равенств (151) формула (165) примет вид

$$\left[\frac{\alpha\beta}{p}\right] = Q_{2,1}. \quad (177)$$

Отсюда мы видим, что

$$Q_{1,2} = Q_{2,1}. \quad (178)$$

Точно также можно доказать, что

$$\left.\begin{aligned} Q_{1,3} = Q_{3,1} = \left[\frac{\alpha\gamma}{p}\right]\\ Q_{1,4} = Q_{4,1} = \left[\frac{\alpha\delta}{p}\right]\\ Q_{2,3} = Q_{3,2} = \left[\frac{\beta\gamma}{p}\right]\\ Q_{2,4} = Q_{4,2} = \left[\frac{\beta\delta}{p}\right]\\ Q_{3,4} = Q_{4,3} = \left[\frac{\gamma\delta}{p}\right]\end{aligned}\right\} \quad (179)$$

Все значения Q нам известны на основании выводов в предыдущем параграфе. Поэтому вопрос об определения веса функции и по формуле (173) можно считать решенным.

На практике значения множителей Q можно получить или при помощи вспомогательных множителей A, B, C (формулы 160, 175, и 179), или непосредственным решением систем уравнений (151), (164) и т. д. Какой из этих способов предпочтительнее, — это зависит от особенностей каждого конкретного случая.

ГЛАВА III.

Условные измерения.

§ 52. Общие основания уравновешивания условных измерений.

В том случае, когда неизвестные аргументы измеренных непосредственно функций связаны между собою одним или несколькими условиями, задача отыскания вероятнейших значений аргументов осложняется тем, что эти значения должны полностью удовлетворять указанным условиям.

Сохраняя все обозначения § 34, будем иметь n начальных уравнений ошибок

$$\left.\begin{aligned} f_1(x, y, \ldots, w) - q_1 &= v_1 \\ f_2(x, y, \ldots, w) - q_2 &= v_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x, y, \ldots, w) - q_n &= v_n, \end{aligned}\right\} \qquad (180)$$

при чем пусть в данном случае k аргументов связаны r условиями вида

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x, y, \ldots, w) &= 0 \\ \varphi_2(x, y, \ldots, w) &= 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \varphi_r(x, y, \ldots, w) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (181)$$

Сохраняя принцип наименьших квадратов, т. е. предъявляя требование, чтобы в случае равноточных измерений

$$\sigma = [v^2] = minimum, \qquad (182)$$

а в случае неравноточных измерений

$$\sigma = [pv^2] = minimum, \qquad (183)$$

мы должны в данном вопросе применить правило высшего анализа в отношении условного *maximum'а* или *minimum'а*, а именно: нужно левые части уравнений (181), связывающих наши аргументы, помножить на неопределенные множители $2\lambda_1$, $2\lambda_2, \ldots 2\lambda_r$ и прибавить или вычесть полученные выражения из основной функции σ (182) или (183).

Будем иметь

$$\sigma = [v^2] - 2\lambda_1\varphi_1 - 2\lambda_2\varphi_2 - \ldots - 2\lambda_r\varphi_r = min, \qquad (184)$$

или

$$\sigma = [pv^2] - 2\lambda_1\varphi_1 - 2\lambda_2\varphi_2 - \ldots - 2\lambda_r\varphi_r = min, \qquad (185)$$

Теперь остается от полученной функции взять производные по каждому из аргументов и приравнять каждую производную нулю.

Получим

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\sigma}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial\sigma}{\partial y} &= 0 \\ &\ldots \\ \frac{\partial\sigma}{\partial w} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (186)$$

Составленные k уравнений (186) вместе с r условиями (181) дают возможность определить r неопределенных множителей и k неизвестных, что и служит решением нашей задачи.

Неопределенные множители $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ принято называть *коррелатами.*

§ 53. Средняя квадратическая ошибка измерения с весом, равным единице, при условных измерениях.

Для случая посредственных измерений нам известна формула

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k}}. \qquad (187)$$

В случае условных измерений, k аргументов не являются самостоятельными: они связаны r условиями. Мы можем, не меняя существа задачи, освободиться от этих условий. Для этого нужно из r условных уравнений определить r неизвестных и подставить их значения в начальные уравнения ошибок. Тогда задача сведется к случаю посредственных измерений при n измеренных функциях и $(k-r)$ независимых аргументах.

Применяя в этом случае формулу (187), получим

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k+r}}. \qquad (188)$$

§ 54. Случай непосредственного измерения величин, связанных условиями.

На практике довольно часто имеет место случай, когда непосредственно измеренные величины связаны одним или несколькими условиями, например: углы сомкнутого или разомкнутого полигона, сеть нивелирных полигонов и проч.

Уравновешивание измеренных при таких условиях данных производится только что описанным способом, при чем техника дела в значительной мере упрощается.

Пусть n неизвестных $X, Y, \ldots, W$ измерены и получились результаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Начальные уравнения ошибок (180) в этом случае примут вид

$$\left.\begin{array}{l} x - q_1 = v_1 \\ y - q_2 = v_2 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ w - q_n = v_n \end{array}\right\} \qquad (189)$$

а условные уравнения будут

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(x, y, \ldots, w) = 0 \\ \varphi_2(x, y, \ldots, w) = 0 \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\ \varphi_r(x, y, \ldots, w) = 0 \end{array}\right| \qquad (190)$$

при чем, согласно (184) и (185) должно иметь место для равноточных измерений

$$\sigma = [v^2] - 2\lambda_1\varphi_1 - 2\lambda_2\varphi_2 - \ldots\ldots - 2\lambda_r\varphi_r = min, \qquad (191)$$

а для неравноточных измерений

$$\sigma = [pv^2] - 2\lambda_1\varphi_1 - 2\lambda_2\varphi_2 - \ldots . 2\lambda_r\varphi_r = min. \qquad (192)$$

Для удобства и упрощения дела примем $q_1, q_2, \ldots, q_n$ за первоначальные значения аргументов $x, y, \ldots, w$ в функциях $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_r$, и $v_1, v_2, \ldots . v_n$ — за поправки, и разложим эти функции по строке Тейлора, ограничиваясь по малости величин поправок первыми степенями их.

Будем иметь

$$\varphi_1(q_1, q_2, \ldots . q_n) + \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_0} v_1 + \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_0} v_2 + \ldots . + \frac{\partial\varphi_1}{\partial w_0} v_n = 0,$$

$$\varphi_2(q_1, q_2, \ldots . q_n) + \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_0} v_1 + \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_0} v_2 + \ldots . + \frac{\partial\varphi_2}{\partial w_0} v_n = 0,$$

$$\cdot \; \cdot$$

$$\varphi_r(q_1, q_2, \ldots . q_n) + \frac{\partial\varphi_r}{\partial x_0} v_1 + \frac{\partial\varphi_r}{\partial y_0} v_2 + \ldots . + \frac{\partial\varphi_r}{\partial w_0} v_n = 0.$$

Здесь под символами

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}, \frac{\partial\varphi}{\partial y_0}, \ldots\ldots, \frac{\partial\varphi}{\partial w_0}$$

разумеются значения производных, вычисленные при

$$x_0 = q_1, \; y_0 = q_2, \ldots . \; w_0 = q_n.$$

Введем обозначения

$$\left.\begin{array}{l}
\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_0}=a_1, \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_0}=a_2, \ldots . \frac{\partial\varphi_1}{\partial w_0}=a_n \\
\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_0}=b_1, \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_0}=b_2, \ldots . \frac{\partial\varphi_2}{\partial w_0}=b_n \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\partial\varphi_r}{\partial x_0}=g_1, \frac{\partial\varphi_r}{\partial y_0}=g_2, \ldots . \frac{\partial\varphi_r}{\partial w_0}=g_n
\end{array}\right| \qquad (193)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\varphi_1(q_1, q_2, \ldots ., q_n)=\zeta_1 \\
\varphi_2(q_1, q_2, \ldots ., q_n)=\zeta_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_r(q_1, q_2, \ldots ., v_n)=\zeta_r
\end{array}\right| \qquad (193)$$

Условные уравнения примут вид

$$\left.\begin{array}{l|l}
\varphi_1 \ldots & a_1v_1+a_2v_2+\ldots+a_nv_n+\zeta_1=0 \\
\varphi_2 \ldots & b_1v_1+b_2v_2+\ldots+b_nv_n+\zeta_2=0 \\
\ldots . & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_r \ldots & g_1v_1+g_2v_2+\ldots+g_nv_n+\zeta_r=0
\end{array}\right\} \qquad (194)$$

Возьмем, согласно (186), производные и приравняем их нулю, причем производные будем брать не по $x, y, \ldots ., w$, а по $v_1, v_2, \ldots . v_n$, что все равно, так как

$$\frac{\partial v_1}{\partial x}=1, \frac{\partial v_2}{\partial y}=1, \ldots \frac{\partial v_n}{\partial w}=1$$

Получим для случая равноточных измерений

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v_1}=2v_1-2\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial v_1}-2\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial v_1}-\ldots .-2\lambda_r\frac{\partial\varphi_r}{\partial v_1}=0$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v_2}=2v_2-2\lambda_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial v_2}-2\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial v_2}-\ldots .-2\lambda_r\frac{\partial\varphi_r}{\partial v_2}=0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial v_n}=2v_n-2\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial v_n}-2\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial v_n}-\ldots .-2\lambda_r\frac{\partial\varphi_r}{\partial v_n}=0.$$

Находя все производные из (194), сокращая на 2 и определяя $v_1, v_2, \ldots ., v_n$, будем иметь

$$\left.\begin{array}{l}
v_1=a_1\lambda_1+b_1\lambda_2+\ldots .+g_1\lambda_r \\
v_2=a_2\lambda_1+b_2\lambda_2+\ldots .+g_2\lambda_r \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
v_n=a_n\lambda_1+b_n\lambda_2+\ldots .+g_n\lambda_r .
\end{array}\right\} \qquad (195)$$

Подставим теперь полученные значения поправок v_1, $v_2, \ldots v_n$ в уравнения (194). Тогда для первого уравнения получим

$$\begin{aligned} a_1 v_1 &= a_1 a_1 \lambda_1 + a_1 b_1 \lambda_2 + \ldots + a_1 g_1 \lambda_r \\ a_2 v_2 &= a_2 a_2 \lambda_1 + a_2 b_2 \lambda_2 + \ldots + a_2 g_2 \lambda_r \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n v_n &= a_n a_n \lambda_1 + a_n b_n \lambda_2 + \ldots + a_n g_n \lambda_r \\ \zeta_1 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \zeta_1 \\ \hline 0 &= [aa]\,\lambda_1 + [ab]\,\lambda_2 + \ldots + [ag]\,\lambda_r + \zeta_1. \end{aligned}$$

Подобным же образом преобразуются и остальные уравнения, так что в результате мы будем иметь

$$\left.\begin{aligned} &[aa[\,\lambda_1 + [ab]\,\lambda_2 + \ldots + [ag]\,\lambda_r + \zeta_1 = 0 \\ &[ab]\,\lambda_1 + [bb]\,\lambda_2 + \ldots + [bg]\,\lambda_r + \zeta_2 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &[ag]\,\lambda_1 + [bg]\,\lambda_2 + \ldots + [gg]\,\lambda_r + \zeta_r = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (196)$$

Полученные уравнения называются *нормальными уравнениями коррелат.*

Решая эти уравнения, мы найдем значения коррелат λ_1, $\lambda_2, \ldots \lambda_r$, подстановка коих в уравнения (195) даст возможность вычислить величины поправок v_1, $v_2, \ldots, v_n$, а, значит, по (189) и вероятнейшие значения неизвестных

$$x,\ y, \ldots, w.$$

Применяя к случаю неравноточных измерений только что описанный прием, мы для поправок получим уравнения

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{a_1}{p_1}\lambda_1 + \frac{b_1}{p_1}\lambda_2 + \ldots + \frac{g_1}{p_1}\lambda_r \\ v_2 &= \frac{a_2}{p_2}\lambda_1 + \frac{b_2}{p_2}\lambda_2 + \ldots + \frac{g_2}{p_2}\lambda_r \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= \frac{a_n}{p_n}\lambda_1 + \frac{b_n}{p_n}\lambda_2 + \ldots + \frac{g_n}{p_n}\lambda_r. \end{aligned}\right| \qquad (197)$$

а нормальные уравнения коррелат примут вид

$$\left.\begin{aligned} &\left[\frac{aa}{p}\right]\lambda_1 + \left[\frac{ab}{p}\right]\lambda_2 + \ldots + \left[\frac{ag}{p}\right]\lambda_r + \zeta_1 = 0 \\ &\left[\frac{ab}{p}\right]\lambda_1 + \left[\frac{bb}{p}\right]\lambda_2 + \ldots + \left[\frac{bg}{p}\right]\lambda_r + \zeta_2 = 0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\left[\frac{ag}{p}\right]\lambda_1 + \left[\frac{bg}{p}\right]\lambda_2 + \ldots + \left[\frac{gg}{p}\right]\lambda_r + \zeta_r = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (198)$$

§ 55. Схема и контроль составления и решения нормальных уравнений коррелат

Как видно из (196) система нормальных уравнений коррелат обладает всеми свойствами системы нормальных уравнений. Поэтому для решения этой системы вполне применим метод Гаусса и самое решение следует производить по схеме, рассмотренной нами выше для случая посредственных измерений. В этой схеме следует лишь положить, что

$$[al]=\zeta_1\,;\ [bl]=\zeta_2\,;\ .\ .\ .\ [gl]=\zeta_r.$$

Так как свободные члены нормальных уравнений коррелат суть свободные члены условных уравнений (194), то при составлении нормальных уравнений нужно поверить лишь правильность вычисления коэффициентов этих уравнений при неизвестных.

Для этого пользуются методом сумм, полагая

$$\begin{array}{l} a_1+b_1+\dots+g_1=s'_1 \\ a_2+b_2+\dots+g_2=s'_2 \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ a_r+b_r+\dots+g_r=s'_r. \end{array}$$

Отсюда

$$\left.\begin{array}{l} [aa]+[ab]+\dots+[ag]=[as'] \\ [ab]+[bb]+\dots+[bg]=[bs'] \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ [ag]+[bg]+\dots+[gg]=[gs']. \end{array}\right\} \qquad (199)$$

Поверив по этим формулам составление системы нормальных уравнений коррелат, мы прибавляем к выражениям $[as']$, $[bs']\dots[gs']$ соответственно свободные члены $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_r$ и вводим обозначения

$$\left.\begin{array}{l} [as']+\zeta_1=[as] \\ [bs']+\zeta_2=[bs[\\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ [gs']+\zeta_r=[gs]. \end{array}\right\} \qquad (200)$$

Полученные значения $[as]$, $[bs], \dots, [gs]$ дадут нам возможность контролировать при решении образование эквивалентных уравнений по формулам (122).

Так, мы будем иметь контрольные равенства:

$$\left.\begin{array}{r} [bb.1]+[bc.1]+\dots+[bg.1]+[bl.1]=[bs.1] \\ [cc.2]+\dots+[cg.2]+[cl.2]=[cs.2] \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ [gg.(r-1)]+[gl.(r-1)]=[gs.(r-1)]. \end{array}\right\} \qquad (201)$$

Здесь, как уже выше сказано, нужно считать, что

$$[al]=\zeta_1,\ [bl]=\zeta_2,\dots [gl]=\zeta_r.$$

Последнее из контрольных равенств (123)

$$[ll.r] = [ls.r]$$

уже не может иметь место в случае условных измерений, так как величины l_1, $l_2, \ldots$ нам неизвестны, а потому мы не можем знать выражений $[ll]$ и $[ls]$. Но, взамен этого равенства, можно ввести выведенное нами контрольное равенство (130), которому в нашем случае можно придать вид,

$$\left([al]+[bl]+\ldots+[gl]\right)+\frac{[al][al]}{[aa]}+\frac{[bl.1][bl.1]}{[bb.1]}+\ldots+\frac{[gl.(r-1)][gl.(r-1)]}{[gg.(r-1)]}=\frac{[al][as]}{[aa]}+\frac{[bl.1][bs.1]}{[bb.1]}+\ldots+\frac{[gl.(r-1)][gs.(r-1)]}{[gg.(r-1)]}. \qquad (202)$$

Заключительное контрольное равенство (128) также не имеет места в случае условных измерений.

Для замены его возьмем уравнения поправок (195), помножим члены этих уравнений на соответствующие величины v_1, $v_2, \ldots . v_n$ и сложим левые и правые части. Будем иметь

$$[v^2] = [av]\lambda_1 + [bv]\lambda_2 + \ldots . + [gv]\lambda_r. \qquad (203)$$

Но из условных уравнений (194),

$$[av] = -\zeta_1, \quad [bv] = -\zeta_2 \ldots, \quad [gv] = -\zeta_r,$$

а потому равенство (193) примет вид

$$[v^2] = -\zeta_1\lambda_1 - \zeta_2\lambda_2 - \ldots . - \zeta_r\lambda_r,$$

или, применяя сокращенное обозначение,

$$[v^2] = -[\lambda\zeta]. \qquad (204)$$

В случае неравноточных измерений бывает полезно при вычислениях ввести величины взаимно обратные весам

$$\frac{1}{p_1} = \pi_1, \quad \frac{1}{p_2} = \pi_2, \ldots . \frac{1}{p_n} = \pi_n. \qquad (205)$$

Тогда уравнения поправок (107) примут вид

$$\left.\begin{array}{l} v_1 = \pi_1 a_1\lambda_1 + \pi_1 b_1\lambda_2 + \ldots . + \pi_1 g_1\lambda_r \\ v_2 = \pi_2 a_2\lambda_1 + \pi_2 b_2\lambda_2 + \ldots . + \pi_2 g_2\lambda_r \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n = \pi_n a_n\lambda_1 + \pi_n b_n\lambda_2 + \ldots + \pi_n g_n\lambda_r. \end{array}\right\} \qquad (206)$$

Система нормальных уравнений коррелат представится в виде

$$\left.\begin{aligned}[\pi aa]\,\lambda_1+[\pi ab]\,\lambda_2+\ldots+[\pi ag]\,\lambda_r+\zeta_1&=0\\ [\pi ab]\,\lambda_1+[\pi bb]\,\lambda_2+\ldots+[\pi bg]\,\lambda_r+\zeta_2&=0\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\\ [\pi ag]\,\lambda_1+[\pi bg]\,\lambda_2+\ldots+[\pi gg]\,\lambda_r+\zeta_r&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(207)$$

Таким преобразованием мы устраним действие деления при составлении нормальных уравнений коррелат, заменив это действие другим, более удобным, умножением.

Величины $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ берутся по таблицам взаимно обратных величин. Кроме того, весьма часто величины $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n$ бывают известны непосредственно из измерений. Это бывает в тех случаях, когда мы считаем вес измерений обратно пропорциональным длине хода, числу углов, числу станций и т. д.

После составления нормальных уравнений коррелат самое решение этих уравнений и контроль вычислений в случае неравноточных измерений совершенно одинаковы с таковыми в случае равноточных измерений.

Но заключительная контрольная формула принимает в этом случае вид

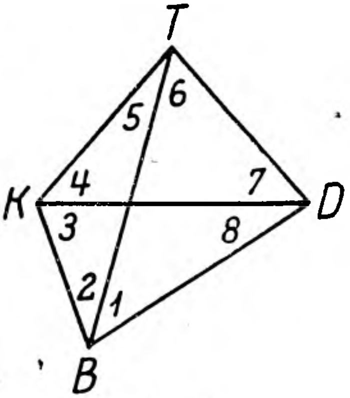
$$[pv^2] = -[\lambda\zeta]. \qquad (208)$$

В справедливости этой формулы можно убедиться умножением членов равенств (197) соответственно на выражения $v_1p_1, v_2p_2, \ldots v_np_n$ и последующим сложением левых и правых частей этих равенств.

§ 56. Уравновешивание углов геодезического четырехугольника.

Даны равноточные измерения углов геодезического четыреугольника *BKTD* (черт. 14):

1) 43° 13′ 58″,3
2) 34° 0′ 52″,4
3) 70° 22′ 31″,0
4) 51° 31′ 32″,0
5) 24° 0′ 59″,6
6) 56° 27′ 12″,4
7) 47° 56′ 13″,1
8) 32° 22′ 35″,4.



Черт. 14.

Из геодезии известно, что углы геодезического четыреугольника должны удовлетворять трем условиям фигур и одному условию полюса.

Для условий фигур возьмем треугольники *BKT*, *BTD*, и *BKD*.

Сумма углов этих треугольников равна соответственно

179° 59′ 54″,7; 179° 59′ 58″,6; 179° 59′ 56″,7, а сферические избытки —

$$0'',3;\quad 0'',6;\quad 0'',4.$$

Поэтому невязки в суммах углов этих треугольников будут

$$-5'',3,\quad -1'',4,\quad -3'',3.$$

Условные уравнения, связывающие поправки углов, будут

$$\left.\begin{aligned}(2)+(3)+(4)+(5)-5'',3=0\\(1)+(6)+(7)+(8)-1'',4=0\\(1)+(2)+(3)+(8)-3'',3=0.\end{aligned}\right\}\qquad(209)$$

Здесь цифры в скобках обозначают искомые поправки соответствующих углов.

Для составления четвертого условного уравнения возьмем за полюс вершину *К*. Имеем

$$\frac{\sin 8\cdot\sin(5+6)\cdot\sin 2}{\sin(1+2)\cdot\sin 7\cdot\sin 5}=1$$

Отсюда, после логарифмирования и надлежащих преобразований, будем иметь

$$\begin{aligned}-\Delta_{1+2}\,.\,(1)+(\Delta_2-\Delta_{1+2})\,.\,(2)+(\Delta_{5+6}-\Delta_5)\,.\,(5)+\\+\Delta_{5+6}\,..(6)-\Delta_7\,.\,(7)-\Delta_8\,.\,(8)+\zeta_4=0.\end{aligned}\qquad(210)$$

Здесь через Δ обозначены поправки логарифмов соответствующих углов на 1'', а

$$\begin{aligned}\zeta_4=\{\lg\ \sin 2+\lg\ \sin(5+6)+\lg\ \sin 8\}-\{\lg\ \sin(1+2)+\\+\lg\ \sin 5+\lg\ \sin 7\}=\sum\nolimits_1-\sum\nolimits_2.\end{aligned}$$

Производя вычисления по семизначным таблицам логарифмов, получим

$$\begin{aligned}\lg\ \sin 2&=9.7477252;\ \Delta_2=31,2\\\lg\ \sin(5+6)&=9.9940491;\ \Delta_{5+6}=3,5\\\lg\ \sin 8&=9.7287436;\ \Delta_8=33,2\end{aligned}$$

$$\sum\nolimits_1=9.4705179;$$

$$\begin{aligned}\lg\ \sin(1+2)&=9.9891526;\ \Delta_{1+2}=4,8\\\lg\ \sin 5&=9.6107274;\ \Delta_5=47,2\\\lg\ \sin 7&=9.8706428;\ \Delta_7=19,0\end{aligned}$$

$$\sum\nolimits_2=9.4705228;$$

$$\zeta_4=\sum\nolimits_1-\sum\nolimits_2=-49.$$

В нашем примере все Δ и ζ_4 выражены в единицах седьмого знака логарифма.

Подставляя найденные значения в уравнение (210), получим

$$-4{,}8\,(1)+26{,}4\,(2)-43{,}7\,(5)+3{,}5\,(6)-19{,}0\,(7)+33{,}2\,(8)-49=0.$$

Это и есть четвертое условное уравнение.

В этом уравнении можно было бы все коэффициенты и свободный член разделить на 10, для того чтобы сделать их соразмерными с коэффициентами и свободными числами остальных условных уравнений.

Располагаем все 4 условных уравнения в нижеследующую таблицу.

Коэффиц. Поправки	A	B	C	D	S'	V	V^2
(1)	0	+1	+1	−4.8	−2.8	−0″.31	0.0961
(2)	+1	0	+1	+26.4	+28.4	+1.79	3.2041
(3)	+1	0	+1	0	+2.0	+1.02	1.0404
(4)	+1	0	0	0	+1.0	+1.88	3.5344
(5)	+1	0	0	−43.7	−42.7	+0.61	0.3721
(6)	0	+1	0	+3.5	+4.5	+0.79	0.6241
(7)	0	+1	0	−19.0	−18.0	+0.13	0.0169
(8)	0	+1	+1	+33.2	+35.2	+0.79	0.6241
ζ	−5.3	−1.4	−3.3	−49.0			
λ	+1.883	+0.687	−0.862	+0.029		Σ	+9.5122
$\lambda\xi$	−9.980	−0.962	+2.845	−1.421		Σ	−9.518

На основании этих данных составляем таблицу коэффициентов нормальных уравнений коррелат с контрольными суммами (см. стр. 141).

Нормальные уравнения коррелат представятся в виде

$$\left.\begin{array}{r}4\cdot\lambda_1+0\cdot\lambda_2+2\cdot\lambda_3-17.3\lambda_4-5.3=0\\ 0\cdot\lambda_1+4\cdot\lambda_2+2\cdot\lambda_3+12.9\lambda_4-1.4=0\\ 2\cdot\lambda_1+2\cdot\lambda_2+4\cdot\lambda_3+54.8\lambda_4-3.3=0\\ -17.3\lambda_1+12.9\lambda_2+54.8\lambda_3+4105.18\lambda_4-49=0\end{array}\right\}\quad(211)$$

Контрольные суммы для этих уравнений будут

$$[as]=-11.3-5.3=-16.6$$
$$[bs]=+18.9-1.4=+17.5$$
$$[cs]=+62.8-3.3=+59.5$$
$$[ds]=+4155.58-49=+4106.58.$$

Коэфф. Попр.	*aa*	*ab*	*ac*	*ad*	*as'*	*bb*	*bc*	*bd*	*bs'*	*cc*	*cd*	*cs'*	*dd*	*ds'*
(1)	0	0	0	0	0	+1	+1	— 4.8	— 2.8	+1	— 4.8	— 2.8	+ 23.04	+ 13.44
(2)	+1	0	+1	+ 26.4	+ 28.4	0	0	0	0	+1	26.4	28.4	+ 696.96	+ 749.76
(3)	+1	0	+1	0	+ 2	0	0	0	0	+1	0	+ 2	0	0
(4)	+1	0	0	0	+ 1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
(5)	+1	0	0	— 43.7	— 42.7	0	0	0	0	0	0	0	+1909.69	+1865.99
(6)	0	0	0	0	0	+1	0	+ 3.5	+ 4.5	0	0	0	+ 12.25	+ 15.75
(7)	0	0	0	0	0	+1	0	— 19.0	— 18.0	0	0	0	+ 361.0	+ 342.00
(8)	0	0	0	0	0	+1	+1	+ 33.2	+ 35.2	+1	+ 33.2	+ 35.2	+1102.24	+1168.64
Σ	+4	0	+2	— 17.3	— 11.3	+4	+2	+ 12.9	+ 18.9	+4	+ 54.8	+ 62.8	+4105.18	+4155.58

Решение нормальных уравнений коррелат приведено в прилагаемой ниже схеме (см. стр. 142, вспомогательный лист *B* отсутствует).

На основании полученных значений коррелат вычисляем по формулам (195) вероятнейшие значения поправок углов.

Результаты вносим в столбец v приведенной выше таблицы условных уравнений. После этого следует вычисление заключительных контрольных выражений $[v^2]$ и $[\lambda\zeta]$, согласно формулы (204).

Остается ввести найденные поправки v в измеренные значения углов четыреугольника.

§ 57. Средняя квадратическая ошибка единицы веса.

Мы уже установили в § 52 для случая условных измерений формулу (178) средней квадратической ошибки иницы веса

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[pv^2]}{n-k+r}}.$$

В том случае, когда измеряются непосредственно искомые аргументы X, Y, ..., W, мы должны принять, что $n = k$, в силу чего формула средней квадратической ошибки единицы веса примет вид

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[pv^2]}{r}}. \qquad (212)$$

Если измерения равноточны, то полагая $p_1 = p_2 = \ldots . = p_n = 1$, мы получим для средней квадратической ошибки результата непосредственного измерения:

$$\mu = \pm \sqrt{\frac{[v^2]}{r}}. \qquad (213)$$

— 5.3	+ 4.0	0.0	+ 2.0	— 17.3	— 16.6
0.72428_n	0.60206	— ∞	0.30103	1.23805_n	1.22011_n
0.12222_n		— ∞	9.69897	0.63599_n	0.61805_n
+ 1.3250	— 1.4	+ 4.0	+ 2.0	+ 12.9	+ 17.5
+ 0.1270	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
+ 0.4309	— 1.4	+ 4.0	+ 2	+ 12.9	17.5
0.0000	0.14613_n	0.60206	0.30103	1.11059	1.24304
	9.54407_n		9.69897	0.50853	0.64098
$\lambda_1 = + 1.8829$	+ 0.3500	— 3.30	+ 4.0	+ 54.80	+ 59.50
	— 0.0947	+ 2.65	— 1.0	+ 8.65	+ 8.30
	+ 0.4309	+ 0.70	— 1.0	— 6.45	— 8.75
	$\lambda_2 = + 0.6868$	+ 0.05	+ 2.00	+ 57.00	+ 59.05
		8.69897	0.30103	1.75587	1.77122
		8.39794		1.45484	1.47019
		— 0 0250	— 49.0	+ 4105.180	+ 4106.58
		— 0.8368	— 22.923	— 74.823	— 71.797
		$\lambda_3 = — 0.8618$	+ 4.515	— 41.603	— 56.437
			— 1.425	— 1624.462	— 1682.920
			— 68.833	+ 2364.292	+ 2295.426
			1.83780_n	3.37370	3.36086
			8.46410_n	— 59.0	9.99085
			$\lambda_4 = + 0.0291$	+ 7.023	+ 21.995
				+ 0.490	— 6.125
				+ 0.001	+ 1.510
				+ 2.004	— 66.830
				— 49.482	— 49.450

Применяя эту формулу к примеру предыдущего параграфа, мы получим

$$u = \pm \sqrt{\frac{9.5122}{8-4}} = \pm 1.54$$

§ 58. Вес функции уравновешенных элементов в случае условных измерений.

Пусть имеет функцию $U = \theta_0 + \theta_1 X + \theta_2 Y + \ldots + \theta_n W$.

Подставляя вместо истинных значений X, Y, ... W их вероятнейшие уравновешенные значения x, y, ... w, получим

$$u = \theta_0 + \theta_1 x + \theta_2 y + \ldots + \theta_n w. \qquad (214)$$

Для определения веса вычисленного значения функции u необходимо заменить значения уравновешенных элементов их выражениями через непосредственно измеренные значения q_1, q_2, ... q_n.

Пусть тогда функции u получит вид

$$u = E_0 + E_1 q_1 + E_2 q_2 + \ldots E_n q_n. \qquad (215)$$

Зная веса p_1, p_2, ... p_n измеренных значений q_1, q_2, ... q_n, мы можем по формуле (116) теории ошибок представить вес P_u функции u в виде

$$\frac{1}{P_u} = \frac{E_1^2}{p_1} + \frac{E_2^2}{p_2} + \ldots + \frac{E_n^2}{p_n} = \left[\frac{E^2}{p}\right]. \qquad (216)$$

Таким образом, все дело сводится к отысканию коэффициентов E_1, E_2, ..., E_n.

Имеем, согласно формул (179)

$$\begin{aligned} x &= q_1 + v_1 \\ y &= q_2 + v_2 \\ &\ldots\ldots \\ w &= q_n + v_n. \end{aligned}$$

На основании этого формула (214) может быть представлена в виде

$$u = \theta_0 + [\theta q] + [\theta v].$$

Но, по (197)

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{a_1}{p_1}\lambda_1 + \frac{b_1}{p_1}\lambda_2 + \ldots + \frac{g_1}{p_1}\lambda_r \\ v_2 &= \frac{a_2}{p_2}\lambda_1 + \frac{b_2}{p_2}\lambda_2 + \ldots + \frac{g_2}{p_2}\lambda_r \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_n &= \frac{a_n}{p_n}\lambda_1 + \frac{b_n}{p_n}\lambda_2 + \ldots + \frac{g_n}{p_n}\lambda_r, \end{aligned}$$

а потому

$$u = \theta_0 + [\theta q] + \left[\frac{a\theta}{p}\right]\lambda_1 + \left[\frac{b\theta}{p}\right]\lambda_2 + \ldots + \left[\frac{g\theta}{p}\right]\lambda_r. \qquad (217)$$

Для исключения из полученной формулы коррелат λ_1, λ_2, ..., λ_r, как зависящих, в свою очередь от величин q_1, q_2, ..., q_n, помножим члены левых частей нормальных уравнений коррелат (198) соответственно на неопределенных вспомогательных множителей $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$ и полученные результаты прибавим к правой части формулы (217). Подбирая в результате члены по $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, будем иметь

$$\begin{aligned} u = \Theta_0 + [\Theta q] &+ \left\{\left[\frac{aa}{p}\right]\eta_1 + \left[\frac{ab}{p}\right]\eta_2 + \ldots + \left[\frac{ag}{p}\right]\eta_r + \left[\frac{a\Theta}{p}\right]\right\}\lambda_1 + \\ &+ \left\{\left[\frac{ab}{p}\right]\eta_1 + \left[\frac{bb}{p}\right]\eta_2 + \ldots + \left[\frac{bg}{p}\right]\eta_r + \left[\frac{b\Theta}{p}\right]\right\}\lambda_2 + \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &+ \left\{\left[\frac{ag}{p}\right]\eta_1 + \left[\frac{bg}{p}\right]\eta_2 + \ldots + \left[\frac{gg}{p}\right]\eta_r + \left[\frac{g\Theta}{p}\right]\right\}\lambda_r + \\ &+ \zeta_1\eta_1 + \zeta_2\eta_2 + \ldots + \zeta_r\eta_r. \end{aligned} \tag{218}$$

Пользуясь неопределенностью вспомогательных множителей $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$, подберем их так, чтобы коэффициенты при коррелатах $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ в формуле (218) обратились в нуль. Будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \left[\frac{aa}{p}\right]\eta_1 + \left[\frac{ab}{p}\right]\eta_2 + \ldots + \left[\frac{ag}{p}\right]\eta_r + \left[\frac{a\Theta}{p}\right] = 0 \\ \left[\frac{ab}{p}\right]\eta_1 + \left[\frac{bb}{p}\right]\eta_2 + \ldots + \left[\frac{bg}{p}\right]\eta_r + \left[\frac{b\Theta}{p}\right] = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \left[\frac{ag}{p}\right]\eta_1 + \left[\frac{bg}{p}\right]\eta_2 + \ldots + \left[\frac{gg}{p}\right]\eta_r + \left[\frac{g\Theta}{p}\right] = 0 \end{aligned}\right\} \tag{219}$$

при чем формула (218) примет вид

$$u = \Theta_0 + [\Theta q] + \zeta_1\eta_1 + \zeta_2\eta_2 + \ldots + \zeta_r\eta_r. \tag{220}$$

Система уравнений (219) отличается от системы нормальных уравнений коррелат лишь тем, что в ней вместо свободных членов $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_r$, зависящих от $q_1, q_2, \ldots, q_n$, имеются свободные члены

$$\left[\frac{a\Theta}{p}\right], \left[\frac{b\Theta}{p}\right], \ldots \left[\frac{g\Theta}{p}\right],$$

не зависящие от непосредственно измеренных значений.

Следовательно, решая систему уравнений (219), мы найдем значения вспомогательных множителей $\eta_1, \eta_2, \ldots \eta_r$, не зависящие от величин $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Что касается входящих в формулу (220) величин $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_r$ то для них мы имеем, согласно (193),

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \varphi_1(q_1, q_2, \ldots, q_n) \\ \zeta_2 &= \varphi_2(q_1, q_2, \ldots, q_n) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \zeta_r &= \varphi_r(q_1, q_2, \ldots, q_n). \end{aligned}$$

Теперь мы можем для веса функции u написать выражение

$$\frac{1}{P_u}=\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)^2}{p_1}+\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial q_2}\right)^2}{p_2}+\ldots.+\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial q_n}\right)^2}{p_n} \qquad (221)$$

и найти значения всех входящих в него производных.

Получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial q_1}&=\Theta_1+\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_1}\eta_1+\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2}\eta_2+\ldots.+\frac{\partial \varphi_r}{\partial q_1}\eta_r\\
\frac{\partial u}{\partial q_2}&=\Theta_2+\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_2}\eta_1+\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_2}\eta_2+\ldots.+\frac{\partial \varphi_r}{\partial q_2}\eta_r\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial u}{\partial q_n}&=\Theta_n+\frac{\partial \varphi_1}{\partial q_n}\eta_1+\frac{\partial \varphi_2}{\partial q_n}\eta_2+\ldots.+\frac{\partial \varphi_r}{\partial q_n}\eta_r,
\end{aligned}$$

или, согласно обозначений (193),

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial q_1}&=\Theta_1+a_1\eta_1+b_1\eta_2+\ldots.+g_1\eta_r\\
\frac{\partial u}{\partial q_2}&=\Theta_2+a_2\eta_1+b_2\eta_2+\ldots.+g_2\eta_r\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\frac{\partial u}{\partial q_n}&=\Theta_n+a_n\eta_1+b_n\eta_2+\ldots.+g_n\eta_r
\end{aligned}\right\} \qquad (222)$$

Полученные формулы решают вопрос.

Формула (221) может быть несколько преобразована. Для этого возведем на самом деле левые и правые части равенств (222). Получим для первого из них

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial u}{\partial q_1}\right)^2&=\Theta_1{}^2+a_1\Theta_1\eta_1+\Theta_1 b_1\eta_2+\ldots.+g_1\Theta_1\eta_r+\\
&+(a_1\Theta_1+a_1a_1\eta_1+a_1b_1\eta_2+\ldots.+a_1g_1\eta_r)\eta_1+\\
&+(b_1\Theta_1+a_1b_1\eta_1+b_1b_1\eta_2+\ldots.+b_1g_1\eta_r)\eta_2+\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+(g_1\Theta_1+a_1g_1\eta_1+b_1g_1\eta_2+\ldots.+g_1g_1\eta_r)\eta_r.
\end{aligned}$$

Таким же порядком представятся квадраты остальных производных. Составляем теперь выражение

$$\left[\frac{\left(\frac{du}{dq}\right)^2}{p}\right];$$

подбирая члены по множителям η_1, η_2, ... η_r и принимая во внимание (219), будем иметь

$$\frac{1}{P_u}=\left[\frac{\left(\frac{\partial u}{\partial q}\right)^2}{p}\right]=\left[\frac{\Theta\Theta}{p}\right]+\left[\frac{a\Theta}{p}\right]\eta_1+\left[\frac{b\Theta}{p}\right]\eta_2+\dots+\left[\frac{g\Theta}{p}\right]\eta_r. \quad (223)$$

Считая полученное уравнение добавочным к системе уравнений (209) и исключая во всей системе неизвестные η_1, η_2, ... η_r по способу Гаусса, мы в конце концов, по исключении всех неизвестных, получим

$$\frac{1}{P_u}=\left[\frac{\Theta\Theta}{p}\right]-\frac{\left[\frac{a\Theta}{p}\right]^2}{\left[\frac{aa}{p}\right]}-\frac{\left[\frac{b\Theta}{p}\cdot 1\right]^2}{\left[\frac{bb}{p}\cdot 1\right]}-\frac{\left[\frac{c\Theta}{p}\cdot 2\right]^2}{\left[\frac{cc}{p}\cdot 2\right]}-\dots-\frac{\left[\frac{g\Theta}{p}\cdot(r-1)\right]}{\left[\frac{gg}{p}\cdot(r-1)\right]}. \quad (224)$$

По этой формуле можно определить вес P_u, не вычисляя вспомогательных множителей η_1, η_2, ... η_r.

Выведенные формулы применяются и для определения весов уравновешенных элементов. Так, для определения P_x нужно положить

$$u=1\cdot x,$$

т. е. нужно положить в формуле (214)

$$\Theta_1=1,\quad \Theta_0=0,\quad \Theta_2=0,\dots\ \Theta_n=0.$$

Давая в формулах (222), или (223), или (224) коэффициентам Θ_0, Θ_1, Θ_2 .... указанные значения, мы и найдем величину P_x.

Применим выведенные формулы для определения веса уравновешенного первого угла в примере § 56.

Полагаем $\Theta_1=1$; остальные коэффициенты Θ равны нулю. Веса p_1, p_2, ... p_8 равны 1.

Будем иметь

$$[\Theta\Theta]=1$$
$$[a\Theta]=0$$
$$[b\Theta]=1$$
$$[c\Theta]=1$$
$$[d\Theta]=-4{,}8.$$

Далее из вычислений § 56 имеем $[aa]=4$; $[bb\cdot 1]=4$; $[cc\cdot 1]=2$; $[dd\cdot 3]=2364{,}3$.

Вычисляем последовательно $[b\Theta\cdot 1]$, $[c\Theta\cdot 2]$, $[d\Theta\cdot 3]$.

Получим

$$[b\Theta\cdot 1]=1$$
$$]c\Theta\cdot 2]=1-{}^1/_2={}^1/_2$$
$$[d\Theta\cdot 3]=-4{,}8-3{,}225-14{,}25=-22{,}275.$$

Отсюда, по формуле (214), будем иметь

$$\frac{1}{P_x} = 1 - 0 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4.2} - \frac{(22.3)^2}{2364}$$

или

$$\frac{1}{P_x} = 0{,}586,$$

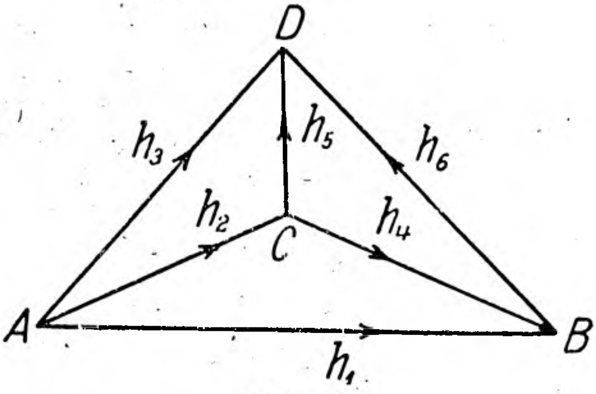
откуда

$$P_x = 2{,}4.$$

При уравновешивании условных измерений можно решать нормальные уравнения и не по методу Гаусса. Но тогда уже пользование формулой (224) для определения веса функции является затруднительным. Необходимо в этом случае обратиться к вычислению вспомогательных множителей η_1, $\eta_2, \ldots . \eta_r$ при помощи уравнений (219). При этом нужно иметь в виду, что эти уравнения отличаются от нормальных уравнений коррелат только свободными членами, поэтому все коэффициенты в преобразованных из системы (219) эквивалентных уравнениях будут те же самые, что и при решении нормальных уравнений коррелат, так что по существу здесь дело сводится к постепенному вычислению свободных членов эквивалентных уравнений.

§ 59. Уравновешивание нивелирной сети.

Для лучшего уяснения установленных в предыдущих параграфах положений рассмотрим еще пример на уравновешивание изображенной схематически на черт. 15 нивелирной сети. Этот пример разобран в „Курсе низшей Геодезии“ А. Н. Бика (ч. II, стр. 427—429, издание 6-е), при чем там был применен прием уравновешивания посредственных измерений. Мы уже применим прием уравновешивания условных измерений.



Черт. 15.

В приводимой ниже таблице даны 6 определенных нивелированием разностей высот точек *A, B, C* и *D* и длины соответствующих нивелирных ходов.

	m	km
AB . . .	$h_1 = +10.8838$	$l_1 = 11.67$
AC . .	$h_2 = +\ 4.6783$	$l_2 = \ 9.24$
AD . . .	$h_3 = +18.5595$	$l_3 = 20.42$
CB . . .	$h_4 = +\ 6.1963$	$l_4 = \ 6.05$
CD . . .	$h_5 = +13.8677$	$l_5 = 12.86$
BD . . .	$h_6 = +\ 7.6657$	$l_6 = 16.58.$

Составим условные уравнения поправок $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ к измеренным разностям высот. Для этого воспользуемся тремя замкнутыми полигонами *ACB, ACD* и *CBD*. Будем иметь

$$\left.\begin{aligned} & && mm \\ 1)\ & v_1 - v_2 - v_4 + && 9.2 = 0 \\ 2)\ & v_2 - v_3 + v_5 - && 13.5 = 0 \\ 3)\ & v_4 - v_5 + v_6 - && 5.7 = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (225)$$

Полагая, что расстояние между соседними пикетами при нивелировании было везде одинаково, мы можем считать, что в данном случае веса разностей высот обратно пропорциональны длинам соответствующих нивелирных ходов. Пусть

$$p = \frac{1}{l}; \qquad (226)$$

тогда, согласно обозначений (205),

$$\pi = l. \qquad (227)$$

Имея это в виду, составим таблицу условных уравнений, а по ним таблицу коэффициентов нормальных уравнений коррелат. Получим

	A	*B*	*C*	s'	$\pi = l$	$p = \frac{1}{\pi}$	v	v^2	pv^2
							mm		
v_1	+1			+1	11.67	0.085	−1.8	3.24	0.275
v_2	−1	+1			9.24	0.108	+4.8	23.04	2.488
v_3		−1		−1	20.42	0.049	−7.4	54.76	2.683
v_4	−1		+1		6.05	0.165	+2.6	6.76	1.115
v_5		+1	−1		12.86	0.078	+1.3	1.69	0.133
v_6			+1	+1	16.58	0.060	+4.4	19.36	1.160
								Σ	7.855
ζ	+9.2	−13.5	−5.7						
λ	−0.157	+0.364	+0.266						
$\zeta\lambda$	−1.444	−4.914	−1.516					Σ	−7.874

Отсюда

	πaa	πab	πac	$\pi as'$	πbb	πbc	$\pi bs'$	πcc	$\pi cs'$
v_1	+ 11.67			+ 11.67					
v_2	+ 9.24	− 9.24			+ 9.24				
v_3					+ 20.42		+ 20.42		
v_4	+ 6.05		− 6.05					+ 6.05	
v_5					+ 12.86	− 12.86		+ 12.86	
o_6								+ 16.58	+ 16.58
Σ	+ 26.96	− 9.24		+ 11.67	+ 42.52	− 12.86	+ 20.42	+ 35.49	+ 16.58

Нормальные уравнения коррелат будут

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I.} & +26.96\lambda_1 - 9.24\lambda_2 - 6.05\lambda_3 + 9.2 = 0 \\ \text{II.} & -9.24\lambda_1 + 42.52\lambda_2 - 12.86\lambda_3 - 13.5 = 0 \\ \text{III.} & -6.05\lambda_1 - 12.86\lambda_2 + 35.49\lambda_3 - 5.7 = 0 \end{array}\right\} \quad (228)$$

Воспользуемся для решения этих уравнений арифмометром или таблицами произведений и решим их способом сравнения коэффициентов. При чем для контроля будем пользоваться суммами

$$\begin{array}{l} [\pi as] = +11.67 + 9.2 = +20.87 \\ [\pi bs] = +20.42 - 13.5 = +6.92 \\ [\pi cs] = +16.58 - 5.7 = +10.88. \end{array}$$

Получим последовательно

$$\left.\begin{array}{l} I' = 9.24 \times 1 + 26.96 \times II \ldots. 1061\lambda_2 - 402.6\lambda_3 - 279.0 = 0 \\ II' = 6.05 \times 11 - 9.24 \times III \ldots. 376.1\lambda_2 - 405\cdot 7\lambda_3 - 29.01 = 0 \end{array}\right\} (229)$$

Контрольные суммы будут + 379.4 и — 58.61.

Освобождаясь тем же путем от λ_2, будем иметь

$$I'' = 376.1 \times I' - 1061 \times II' \ldots. + 2790\lambda_3 - 741.5 = 0 \quad (230)$$

Контрольная сумма + 2049.

Отсюда

$$\lambda_3 = +0{,}266.$$

Из уравнений системы (229)

$$\lambda_2 = +0{,}364.$$

Из уравнений системы (228)

$$\lambda_1 = -0{,}157.$$

Теперь по формулам (196) вычисляем величины поправок v_1, $v_2 \dots v_6$ и вносим результаты в приведенную выше таблицу условных уравнений. Там же делаем подсчет $[pv^2]$ и $[\lambda\zeta]$ для заключительного контроля по формуле

$$[pv^2] = -[\lambda\zeta].$$

Средняя квадратическая ошибка единицы веса будет

$$\mu = \pm\sqrt{\frac{7.855}{3}} = \pm \overset{mm}{1{,}62} \text{(на 1 километр)}.$$

Определим теперь вес, например, P_{h3}. Для этого мы должны положить в формуле (214) $\Theta_3 = 1$, а $\Theta_0 = \Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_4 = \Theta_5 = \Theta_6 = 0$.

Тогда

$$U = h_3 + v_3.$$

Переходим к формуле (223)

$$\frac{1}{P_u} = \left[\frac{\Theta\Theta}{p}\right] + \left[\frac{a\Theta}{p}\right]\eta_1 + \left[\frac{b\Theta}{p}\right]\eta_2 + \dots$$

В нашем случае

$$\left[\frac{\Theta\Theta}{p}\right] = [\pi\Theta\Theta] = +20.42,$$

$$\left[\frac{a\Theta}{p}\right] = [\pi a\Theta] = 0,$$

$$\left[\frac{b\Theta}{p}\right] = [\pi b\Theta] = -20.42,$$

$$\left[\frac{c\Theta}{p}\right] = [\pi c\Theta] = 0,$$

а потому

$$\frac{1}{P_{h_3}} = +20.42 - 20.42\eta_2. \qquad (231)$$

Для определения η_2 имеем уравнения (219), которые в нашем случае примут вид

$$\begin{aligned} 26{\cdot}96\eta_1 - 9.24\eta_2 - 6.05\eta_3 + 0 &= 0 \\ -9.24\eta_1 + 42.52\eta_2 - 12.86\eta_3 - 20.42 &= 0 \\ -6.05\eta_1 - 12.86\eta_2 + 35.49\eta_3 + 0 &= 0. \end{aligned}$$

Пользуясь при решении этой системы уравнений результатами решения системы нормальных уравнений коррелат и вычисляя вновь лишь свободные члены, мы получим

$$\begin{aligned} I' \dots 1061\eta_2 - 402.6\eta_3 - 550.5 &= 0 \\ II'' \dots 376.1\eta_2 - 405.7\eta_3 - 123.5 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда

$$I'' \dots 2790\eta_3 - 760.1 =$$

Из полученного уравнения

$$\eta_3 = +0{,}275,$$

а из предыдущих уравнений

$$\eta_2 = +0{,}623.$$

Зная величину η_2, мы получим по формуле (231

$$\frac{1}{P_{h3}} = 7{,}70,$$

откуда

$$P_{h3} = 0{,}130.$$

Таким же путем определятся веса и других уравновешенных элементов.

Сравнивая полученные результаты с результатами уравновешивания в „Курсе низшей геодезии“ А. Н. Бика, мы находим полное совпадение. Только там веса были взяты в 1000 раз больше, чем в наших вычислениях, почему для h_3 и получилось $P_{h3} = 130$.

Приведенное сопоставление и полное согласие результатов показывает, что при уравновешивании результатов измерений можно пользоваться с одинаковым успехом и методом посредственных измерений и методом условных измерений.

Результаты уравновешивания будут те же самые.

Практически же нужно в каждом данном случае пользоваться тем из этих методов, который скорее и проще приводит к цели.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ГЛАВА IV.

Применение теории ошибок к обработке результатов геодезических измерений.

ГЛАВА V.

Определение меры влияния источников систематических и случайных ошибок на результаты измерений.

Двойные измерения.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.

Способ наименьших квадратов.

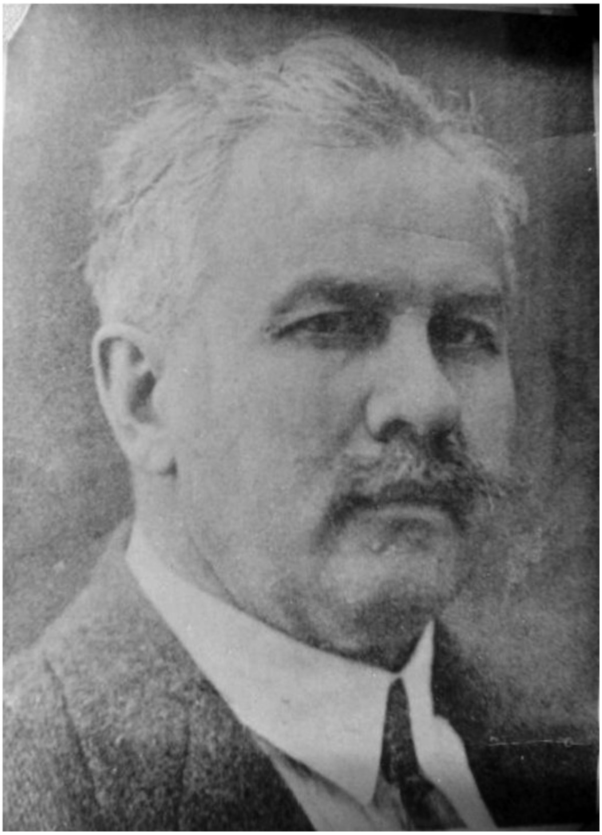
ГЛАВА I.

ГЛАВА II.

Посредственные измерения.

ГЛАВА III.

Условные измерения.




УЧЕНЫЙ-ГЕОДЕЗИСТ
ПРОФЕССОР
ЧЕБОТАРЕВ
АЛЕКСАНДР СТЕПАНОВИЧ
1881 — 1969